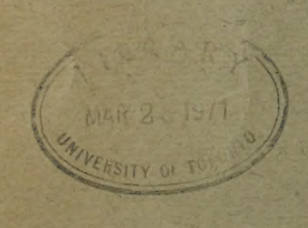

MATHEMATICAL SCIENCES LIBRARY
3 1761 05763447 9

A Monsieur
Mr J.C. Fields
hommage de l'auteur


LIBRARY
MAR 2 - 1971
UNIVERSITY OF TORONTO

Том **ИЗВЕСТИЯ** II

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМЕНИ В. А. СТЕКЛОВА

Об основной задаче гидродинамики.

Н. М. ГЮНТЕРА.

(Представлено академиком В. А. Стекловым в заседании Отделения Физико-Математических Наук 6 февраля 1924 года).

ПРЕДИСЛОВИЕ.

1. Цель моей работы проинтегрировать систему ур-ний

$$(A)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}, \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=\dfrac{\partial \Pi}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=\dfrac{\partial \Pi}{\partial z}, \end{cases} \qquad \Pi=(-p+P):\rho$$

$$(A')\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

управляющую движением несжимаемой жидкости, с постоянной плотностью ρ, под действием сил, имеющих потенциал P, по данным значениям скоростей в начальный момент $t=0$; при этом, проинтегрировать, не делая относительно неизвестных u, v, w и их начальных значений, по возможности, никаких дополнительных предположений:

В этой статье я занимаюсь простейшим случаем, когда жидкость заполняет все пространство; причем, соответственно сказанному, не предполагаю, что скорости u, v, w и их начальные значения u_0, v_0, w_0 имеют вторые производные.

Система (A), (A') не содержит вторых производных, и предположение об их существовании является одним из дополнительных заданий.

Предполагая существование первых производных у скоростей, входящих явно в ур-ния системы, я не предполагаю, что эти производные непрерывны во всем пространстве, но допускаю, что они могут претерпевать

разрыв непрерывности при переходе некоторых поверхностей, называемых мною границами. О границах я предполагаю только, что они удовлетворяют условиям А. М. Ляпунова.

Предполагая, что производные в некоторых областях непрерывны, я считаю, что в этих областях они удовлетворяют условиям Липшица.

Кроме того, о производных я предполагаю, что они ограничены во всем пространстве, что они стремятся к определенным пределам, когда точка приближается к точке на границе, и что с удалением точки в бесконечность они убывают обратно пропорционально квадрату расстояния точки от начала координат.

Решение установлено, и доказана его единственность для ограниченного промежутка времени, следующего за начальным моментом.

2. Решение системы (A) мы получаем, отыскивая решение системы из шести интегральных ур-ний:

$$(B)\quad \begin{cases} u = u_0 + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^t \left(\int \frac{L(\xi - x)}{r^3}\, d\omega\right) dt \\ v = v_0 + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^t \left(\int \frac{L(\eta - y)}{r^3}\, d\omega\right) dt \\ w = w_0 + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^t \left(\int \frac{L(\zeta - z)}{r^3}\, d\omega\right) dt \end{cases}$$

$$(B')\quad \begin{cases} x = q_1 + \displaystyle\int_0^t u(q_1, q_2, q_3, t)\, dt, \quad y = q_2 + \int_0^t v(q_1, q_2, q_3, t)\, dt, \\ z = q_3 + \displaystyle\int_0^t w(q_1, q_2, q_3, t)\, dt, \end{cases}$$

в которых

$$L = 2\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial q_1}, & \frac{\partial u}{\partial q_2}, & \frac{\partial u}{\partial q_3} \\ \frac{\partial v}{\partial q_1}, & \frac{\partial v}{\partial q_2}, & \frac{\partial v}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1}, & \frac{\partial z}{\partial q_2}, & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial q_1}, & \frac{\partial u}{\partial q_2}, & \frac{\partial u}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1}, & \frac{\partial y}{\partial q_2}, & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial w}{\partial q_1}, & \frac{\partial w}{\partial q_2}, & \frac{\partial w}{\partial q_3} \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1}, & \frac{\partial x}{\partial q_2}, & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial v}{\partial q_1}, & \frac{\partial v}{\partial q_2}, & \frac{\partial v}{\partial q_3} \\ \frac{\partial w}{\partial q_1}, & \frac{\partial w}{\partial q_2}, & \frac{\partial w}{\partial q_3} \end{vmatrix},$$

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}, \quad d\omega = dp_1\, dp_2\, dp_3,$$

ξ, η, ζ получаются из x, y, z заменою q_1, q_2, q_3 переменными интегрирования p_1, p_2, p_3; такая же замена выполнена в функции L, стоящей под знаками интегралов; интегрирование распространено по всему пространству.

Функции u, v, w, удовлетворяющие системе (B), (B'), мы получаем, применяя методу последовательных приближений, как суммы рядов, сходящихся при достаточно малом t во всем пространстве и абсолютно сходящихся и диференцируемых во всех точках, не лежащих на границах.

Установив, что система (B') при рассматриваемых значениях t допускает единственное решение относительно q_1, q_2, q_3, при всех значениях x, y и z, и взяв x, y, z за переменные независимые, мы преобразуем систему (B) в систему (A), в которой

$$\Pi = \int \frac{\overline{K} d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r},$$

где $\overline{K}$ получается заменой x, y, z на ξ, η, ζ из

$$K = 2\left\{\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz} - \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy} + \frac{dw}{dz}\frac{du}{dx} - \frac{dw}{dx}\frac{du}{dz}\right\}$$

и интегрирование распространено по всему пространству.

Из этого вытекает, что найденные функции u, v, w связаны зависимостью

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + u\frac{\partial\theta}{\partial x} + v\frac{\partial\theta}{\partial y} + w\frac{\partial\theta}{\partial z} + \theta^2 = 0,$$

в которой

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

откуда ясно, что, если

$$\frac{\partial u_0}{\partial q_1} + \frac{\partial v_0}{\partial q_2} + \frac{\partial w_0}{\partial q_3} = 0,$$

то соблюдено ур-ние (A').

3. Решению указанной задачи посвящена четвертая глава работы.

В первой главе установлены некоторые предложения вспомогательного характера; вторая и третья главы посвящены, главным образом, изучению 2-х производных от объемного интеграла

$$\int \frac{K d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}$$

при довольно незначительных ограничениях для плотности K.

Характер изменения этих производных, главным образом вблизи границ, имеет существенное значение при изучении условий сходимости рядов, встречающихся в главе четвертой.

Результаты этого исследования резюмированы в последнем параграфе главы третьей; основываясь на сказанном в главе первой и на этом резюме, читатель может заниматься главой четвертой, отложив детальное доказательство неравенств глав второй и третьей, довольно деликатных по существу и требующих кропотливых выкладок.

Краткие сообщения о моей работе помещены в CR Парижской Академии, т. 177 за 1923 г. и в Proceedings Конгресса 1924 г. в Торонто. Более полное изложение помещено в томе 24 «Mathematische Zeitschrift».

Н. Гюнтер.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Предварительные теоремы.

1. Положим, что пространство (Q), прямоугольные Декартовы координаты точек которого мы обозначаем буквами q_1, q_2, q_3, разделено собранием поверхностей на связные области.

Указанные поверхности мы будем называть границами.

О границах мы сделаем следующие предположения.

I. Вне сферы некоторого радиуса $R^{(0)}$, описанной около начала координат, нет точек, принадлежащих границам.

II. Каждая из них удовлетворяет условиям А. М. Ляпунова, т. е.:

α) в каждой точке каждой из границ можно провести определенную касательную плоскость;

β) если M_1 и M_2 две точки, принадлежащие одной и той же границе, расстояние между которыми r, и если ϑ угол между нормалями к границе в точках M_1 и M_2, то

$$\vartheta < \mathrm{E} r^{1-\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1,$$

где E и λ числа, независящие от выбора границы и точек M_1 и M_2 на ней;

γ) около каждой точки M на любой границе можно описать сферу радиуса d_0, где d_0 не зависит от выбора границы и точки M на ней, такую, что всякая прямая, параллельная нормали в M к границе, пересечет внутри сферы границы не больше чем в одной точке.

Из свойства (γ) ясно, что расстояние между двумя точками разных границ всегда не меньше d_0.

Из свойства (β) ясно, что угол ϑ между нормалями в точках M_1 и M_2 внутри той же сферы радиуса d_0 не больше

$$\mathrm{E}(2d_0)^{1-\lambda}.$$

Если радиус сферы настолько мал, что последнее число меньше 1,05, то этот угол не больше $\frac{\pi}{3}$.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что d_0 выбрано так, чтобы этот угол был не больше $\frac{\pi}{3}$.

Приписывая нормалям к границам определенные направления, мы будем выбирать направления, руководствуясь следующим правилом: если нормаль в некоторой точке границы области направлена внутрь некоторой области, то нормали во всех точках границ этой области направлены внутрь той же области.

Те области, внутрь которых направлены нормали, мы будем называть вторыми, остальные первыми; при этом, область, расположенную вне упомянутой сферы радиуса $R^{(0)}$, мы будем причислять ко вторым.

2. Положим, точка M_0 лежит на границе. Опишем около нее сферу указанным радиусом d_0. Выберем временно за новую координатную плоскость касательную к границе в точке M_0, а за одну из осей нормаль к границе в точке M_0.

На основании свойства (γ) мы можем ур-нию границы внутри сферы (d_0) дать вид

(1) $$\zeta = \Phi(\xi, \eta),$$

если ξ, η, ζ новые координаты.

Функция $\Phi(\xi, \eta)$ задана в части области

$$\xi^2 + \eta^2 \leqq d_0^2$$

и, вследствие свойства (α), имеет в области задания производные, которые, вследствие свойства (β), непрерывны.

Замечание. Если соблюдено неравенство

$$Ed_0^{1-\lambda} < \frac{1}{2},$$

то в любом сечении поверхности плоскостью, заключающей нормаль в M_0, линия сечения выйдя из круга на указанной сфере, в него вновь уже не войдет. Действительно, выбрав это сечение за плоскость XZ, положим, ξ_2 абсцисса точки B (черт. 1), в которой линия сечения, вышедшая из круга, снова войдет в круг. Тангенс угла нормали к линии сечения с осью OZ больше $\operatorname{tg}\alpha$, где α угол нормали к кругу B с осью OZ, т. е. больше

$$\frac{\xi_2}{\sqrt{d_0^2 - \xi_2^2}} > \frac{\xi_2}{d_0}$$

Но угол ϑ нормали к поверхности в B с OZ больше этого угла, т. е.

$$\frac{\xi_2}{d_0} < \operatorname{tg}\vartheta < \frac{8}{7} E d_0^{1-\lambda}, \quad \xi_2 < \frac{4}{7} d_0,$$

так как

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{1 - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}} < \frac{8}{7}\vartheta.$$

Если ξ_1 абсцисса точки A, в которой сечение в первый раз выходит из круга, то

$$\xi_1 < \xi_2 < \frac{8}{7} E d_0^{2-\lambda} < \frac{4}{7} d_0.$$

Расстояние A от M_0 равно d_0, т. е.

$$d_0 = \sqrt{\Phi^2(\xi_1, 0) + \xi_1^2} = \xi_1 \sqrt{\Phi_\xi'(\theta\xi_1, 0)^2 + 1} < \frac{9}{7}\xi_1 < \frac{36}{49} d_0, \quad 0 < \theta < 1,$$

так как

$$|\Phi_\xi'(\theta\xi_1, 0)| = \frac{\cos(N_1 x)}{\cos(N_1 z)} = \frac{\cos(N_1 x) - \cos(Z, x)}{\cos(N_1 z)} < \frac{8}{7} E d_0^{1-\lambda} < \frac{4}{7};$$

полученное же неравенство невозможно.

Покажем, что можно указать положительное число ω, обладающее свойством: если прямая наклонена под углом, меньшем ω к нормали границы в точке M_0, то внутри сферы (d_0), соответствующей M_0, она пересекает поверхность не более чем в одной точке.

Возьмем на границе внутри сферы точку (ξ_0, η_0, ζ_0) и, переписав ур-ние поверхности:

$$\zeta - \zeta_0 = \Phi(\xi, \eta) - \Phi(\xi_0, \eta_0),$$

будем искать ее точки пересечения с прямою

$$\xi - \xi_0 = a(\zeta - \zeta_0), \quad \eta - \eta_0 = b(\zeta - \zeta_0),$$

другими словами, решать ур-ние

(2) $$\zeta - \zeta_0 = \Phi(\xi_0 + a(\zeta - \zeta_0),\ \eta_0 + b(\zeta - \zeta_0)) - \Phi(\xi_0, \eta_0),$$

имеющее очевидное решение

$$\zeta = \zeta_0.$$

Положим, что у ур-ния есть решение ζ_1, отличное от ζ_0.

Преобразовывая правую часть ур-ния (1), подставив в него ζ_1 вместо ζ, получаем:

$$\zeta_1 - \zeta_0 = (\zeta_1 - \zeta_0)\left\{a\Phi_\xi'\left(\xi_0 + \theta a(\zeta_1 - \zeta_0),\ \eta_0 + \theta b(\zeta_1 - \zeta_0)\right) + \right.$$

$$\left. + b\Phi_\eta'\left(\xi_0 + \theta a(\zeta_1 - \zeta_0), \eta_0 + \theta b(\zeta_1 - \zeta_0)\right)\right\} = (\zeta_1 - \zeta_0)\left\{-\frac{a\cos N'\xi + b\cos N'\eta}{\cos N'\zeta}\right\}.$$

где N' нормаль в некоторой точке границы между точками с первыми двумя координатами

$$(\xi_0, \eta_0), \quad (\xi_0 + a(\zeta_1 - \zeta_0), \quad \eta_0 + b(\zeta_1 - \zeta_0))$$

и

$$0 < \theta < 1.$$

Если для всех точек поверхности внутри сферы (d_0) соблюдено неравенство

$$\left|\frac{a\cos N\xi + b\cos N\eta}{\cos N\xi}\right| < 1, \tag{3}$$

то, значит,

$$|\zeta_1 - \zeta_0| = |\zeta_1 - \zeta_0| K, \quad \text{где} \quad K < 1,$$

что требует

$$\zeta_1 = \zeta_0$$

и противоречит предположению.

Значит, если соблюдено неравенство (3), то $\zeta = \zeta_0$ единственное решение ур-ния (2), и взятая прямая пересекает границу только в одной точке.

Так как для центра сферы

$$\cos N\xi = 0, \quad \cos N\eta = 0, \quad \cos N\zeta = 1,$$

имеем внутри сферы:

$$|\cos N\xi| < \mathrm{E}d_0^{1-\lambda}, \quad |\cos N\eta| < \mathrm{E}d_0^{1-\lambda},$$

$$|\cos N\zeta| = \left|1 - 2\sin^2\left(\frac{N\zeta}{2}\right)\right| > 1 - \frac{1}{2}\mathrm{E}^2 d_0^{2-2\lambda}.$$

Значит, неравенство (3) соблюдено, если соблюдено неравенство

$$(|a| + |b|)\,\mathrm{E}d_0^{1-\lambda} < 1 - \frac{1}{2}\mathrm{E}^2 d_0^{2-2\lambda}. \tag{3'}$$

Так как

$$|a| + |b| \leqq \sqrt{2}\,\sqrt{a^2 + b^2}$$

неравенство (3') соблюдено, если

$$\sqrt{a^2+b^2} < \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\mathrm{E}d_0^{1-\lambda}} - \frac{1}{2}\mathrm{E}d_0^{1-\lambda}\right).$$

Обозначая через $\operatorname{tg}\omega$ число, не превышающее правой части последнего неравенства, имеем:

$$a^2+b^2 < \operatorname{tg}^2\omega.$$

Значит, если прямая

$$\xi-\xi_0 = a(\zeta-\zeta_0), \quad \eta-\eta_0 = b(\zeta-\zeta_0)$$

внутри конуса

$$(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2 = \operatorname{tg}^2\omega(\zeta-\zeta_0)^2,$$

угол растворения которого 2ω, то она пересекает границу внутри сферы только в точке (ξ_0, η_0, ζ_0).

Чем меньше число $\mathrm{E}d_0^{1-\lambda}$, то есть, чем меньше радиус сферы d_0, тем больше угол ω.

Если, например,

$$\mathrm{E}d_0^{1-\lambda} < 2-\sqrt{2},$$

то $\omega > \frac{\pi}{4}$ и угол растворения конуса более прямого угла.

Заметим, что если ϑ угол между нормалью в точке на границе и в центре сферы, то

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} < \frac{\mathrm{E}d_0^{1-\lambda}}{1-\frac{1}{2}\mathrm{E}^2 d_0^{2-\lambda}}.$$

Отсюда заключаем, что, когда

$$\mathrm{E}d_0^{1-\lambda} < 0{,}65,$$

нормаль в любой точке внутри сферы лежит внутри конуса, указанного выше, и, значит, прямые, параллельные нормалям в точках внутри сферы, пересекают границу в этом случае только в одной точке.

Заметим, что, когда соблюдено последнее неравенство

$$\operatorname{tg}\omega \geqslant 0{,}85$$

и, значит,

$$\omega > 40^\circ.$$

Если соблюдено условие, указанное в замечании, то $\operatorname{tg}\omega > 1,23$, $\omega > 50^\circ$.

3. Положим, что даны функции времени t и координат точки $M(q_1, q_2, q_3)$ пространства (Q)

$$(4) \qquad u(q_1, q_2, q_3, t), \quad v(q_1, q_2, q_3, t), \quad w(q_1, q_2, q_3, t),$$

про которые известно, что они

(I) непрерывны во всем пространстве и при всяком значении t, удовлетворяющем неравенству

$$0 \leq t < T,$$

где T некоторое число.

Обозначим через ρ расстояние точки M от начала координат, а через A некоторую положительную возрастающую функцию от t, и положим, что

$$\text{(II)} \qquad |u| < A, \ldots, \rho|u| < A, \ldots,$$

обозначая, как и везде далее, многоточием, что, не меняя неравенства, можно u заменить через v и w.

Про функции (2) мы положим еще, что они имеют производные по t, и что эти производные

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}$$

(III) непрерывны во всем пространстве (Q) и при всех возможных значениях t, * причем

$$\text{(IV)} \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| < A', \ldots, \rho\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| < A', \ldots,$$

где A' некоторая другая функция от t, за которую, как мы увидим, можно брать производную от A;

что если точка M не принадлежит границе, то функции (2) имеют в точке M производные

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial w}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial q_i}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t\, \partial q_i}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t\, \partial q_i}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

причем эти производные

(V) непрерывны внутри каждой из областей и при всех возможных значениях t и во всем пространстве (Q) удовлетворяют неравенствам

---

* Для непрерывности во всем пространстве при соблюдении прошлых условий достаточно положить, что эти производные непрерывны в точках не на границе.

$$(\text{VI})\qquad \begin{cases} \left|\frac{\partial u}{\partial q_i}\right| < A, \ldots, \ \rho^2 \left|\frac{\partial u}{\partial q_i}\right| < A, \ldots, \\ \left|\frac{\partial^2 u}{\partial q_i\, \partial t}\right| < A', \ldots, \ \rho^2 \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial q_i}\right| < A', \ldots \end{cases}$$

Далее, положим, что если точка $M_0(q_1^0, q_2^0, q_3^0)$ принадлежит границе, и точка M приближается к M_0, не пересекая границы, оставаясь с одной и той же стороны от границы, производные (5)

(VII) стремятся к определенным пределам, которые могут быть различными при движении точки в области первой или второй.

Обозначая пределы, к которым стремятся производные (5) через

$$(6)\qquad \begin{gathered} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial q_i}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial q_i}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial q_i}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial q_i}\right)_2, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial q_i}\right)_1, \ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t\, \partial q_i}\right)_1, \ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t\, \partial q_i}\right)_1, \ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial q_i}\right)_2, \ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t\, \partial q_i}\right)_2, \ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t\, \partial q_i}\right)_2, \end{gathered}$$

указав значками (1) и (2) на область, в которой точка M, и считая, что расстояние между точками M и M_0 равно r_0, положим:

$$(\text{VIII})\qquad \begin{gathered} \left|\frac{\partial u}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_\alpha\right| < A r_0^{1-\lambda}, \ldots, \qquad i = 1, 2, 3, \\ \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial q_i} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial q_i}\right)_\alpha\right| < A' r_0^{1-\lambda}, \ldots, \qquad \alpha = 1, 2, \end{gathered}$$

где λ число, введенное в параграфе 1.

Наконец, считая, что точки M_1 и M_2, расстояние между которыми r, находятся по одну сторону от границы, и обозначая для удобства знаком

$$[f(q_1, q_2, q_3, t)]$$

абсолютную величину разности между значениями функции $f(q_1, q_2, q_3, t)$ в точках M_1 и M_2, положим

$$(\text{IX})\qquad \begin{gathered} \left[\frac{\partial u}{\partial q_i}\right] < A r^{1-\lambda}, \ldots, \quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial q_i}\right] < A' r^{1-\lambda}, \ldots \\ \rho^2 \left[\frac{\partial u}{\partial q_i}\right] < A r^{1-\lambda}, \ldots, \ \rho^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial q_i}\right] < A' r^{1-\lambda}, \ldots \end{gathered} \qquad i = 1, 2, 3,$$

где ρ расстояние от начала координат до точки M_1 и если

$$r < d_0.$$

Пользуясь перечисленными свойствами функций (4), нетрудно доказать, что функции (6) непрерывные функции от t.

Выбрав произвольно положительное число ε, найдем такую точку M не на границе, чтобы расстояние ее от точки M_0 на границе удовлетворяло условию

$$Ar_0^{1-\lambda} < \frac{\varepsilon}{4}$$

при всех значениях t, близких к некоторому t.

Обозначая значение функций при $t = t_1$ чертами наверху и выбирая t_1 настолько близким к t, чтобы в точке M было

$$\left|\overline{\frac{\partial u}{\partial q_i}} - \frac{\partial u}{\partial q_i}\right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

получим

$$\left|\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial q_i}}\right)_\alpha - \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_\alpha\right| = \left|\left(\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial q_i}}\right)_\alpha - \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_\alpha\right) - \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial q_i}} - \frac{\partial u}{\partial q_i}\right) + \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial q_i}} - \frac{\partial u}{\partial q_i}\right)\right| \leqq$$

$$\leqq \left|\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial q_i}}\right)_\alpha - \overline{\frac{\partial u}{\partial q_i}}\right| + \left|\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_\alpha - \frac{\partial u}{\partial q_i}\right| + \left|\overline{\frac{\partial u}{\partial q_i}} - \frac{\partial u}{\partial q_i}\right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Также доказывается непрерывность остальных функций (6).

4. Где бы ни лежали точки $M_1(q_1, q_2, q_3)$, $M_2(q_1', q_2', q_3')$, расстояние между которыми r,

$$[u] \leqq \sqrt{3}\, Ar, \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Докажем высказанное утверждение для функции u.

Оно очевидно, если отрезок $M_1 M_2$ не пересекает границы, так как в этом случае функция

$$u(q_1 + \lambda(q_1' - q_1),\ q_2 + \lambda(q_2' - q_2),\ q_3 + \lambda(q_3' - q_3),\ t)$$

имеет производную при всех значениях λ между нулем и единицей и

$$u(q_1', q_2', q_3', t) - u(q_1, q_2, q_3, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)_0 (q_1' - q_1) + \left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)_0 (q_2' - q_2) +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)_0 (q_3' - q_3),$$

где производные вычислены в некоторой точке между M_1 и M_2.

Отсюда

$$[u] \leqq \sqrt{3}\, Ar,$$

так как

$$|q_1' - q_1| + |q_2' - q_2| + |q_3' - q_3| \leqq \sqrt{3}\, r.$$

Переходим к рассмотрению общего случая.

Обратим внимание на то, что не только отрезок $M_1 M_2$ может иметь общие точки с границами, но что условиями параграфа 1-го не исключена возможность появления точек сгущения таких точек и ансамблей таких точек сгущения.

При доказательстве, поэтому, мы принимаем во внимание такую возможность.

Разделим расстояние r между точками $M_1 M_2$ на n равных частей, вставив точки

$$M^{(1)},\ M^{(2)},\ \ldots\ M^{(n-1)}.$$

Обозначим через d число $\frac{r}{n}$ и с самого начала положим, что n настолько велико, что d менее d_0, где d_0 радиус сферы условия (γ):

$$d = \frac{r}{n} < d_0.$$

Рассмотрим порознь каждую из этих n частей; рассуждения проведем на отрезке $M' M''$.

Введем в рассмотрение угол ω_1, положив

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{E} d^{1-\lambda}} - \frac{1}{2}\mathrm{E} d^{1-\lambda}\right).$$

Из формул параграфа 2-го ясно, что угол ω_1 меньше угла ω в том конусе, который соответствует сферам радиуса d, описываемым около точек границы, и свойства которого выяснены в параграфе 2-м.

Введем кроме этого в рассмотрение произвольно выбранное число η и отложим на $M' M''$ от M' ряд прилегающих друг к другу отрезков длины $\eta \operatorname{tg} \omega_1$.

Число их s, считая и примыкающий к M'' отрезок, длина которого может быть меньше $\eta \operatorname{tg} \omega_1$, удовлетворяет неравенству

$$s \leqq \frac{d}{\eta \operatorname{tg} \omega_1} + 1 = \frac{2\mathrm{E} d^{2-\lambda}}{\eta\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{E}^2 d^{2-2\lambda}\right)} + 1.$$

Разделим построенные отрезки на две категории; к первой категории мы отнесем те из них, внутри которых есть точки границы, ко второй те, внутри которых точек границы нет.

Соединим отрезки одной и той же категории, прилегающие друг к другу, в больший отрезок. Назовем получившиеся таким образом большие отрезки отрезками первого рода, если они получаются соединением отрезков первой категории, и отрезками второго рода, если они получаются соединением отрезков второй категории.

Два отрезка первого рода отделены один от другого отрезком второго рода; вследствие этого, число отрезков первого рода не больше

$$\frac{s+1}{2}.$$

Видоизменим теперь несколько отрезки 2-го рода. Если $m' m''$ такой отрезок, то подвинем левую его крайнюю точку m', если она не на границе, влево до совпадения с ближайшей точкой n' на границе, имеющейся на примыкающем слева отрезке 1-ой категории (если, конечно, m' не совпадает с M'); так же поступим с крайней правой точкой m'', если она не совпадает с M_2 и не на границе; подвигая ее вправо, мы совместим ее с точкой n'' на границе и отрезок $m' m''$ заменим отрезком $n' n''$. Также, если M' начало отрезка 1-го рода и M' не точка границы, то возьмем за начало 1-го отрезка 1-го рода точку n', ближайшую к M_1 и на границе, и введем в рассмотрение новый отрезок $M' n'$, который причислим к отрезкам 2-го рода.

Аналогичным образом поступим с точкой M''.

От такого преобразования число отрезков 2-го рода увеличится на один или на два, и длина некоторых из них увеличится; число отрезков 1-го рода не изменится, длина некоторых уменьшится (у некоторых до нуля), и концами каждого отрезка 1-го рода будут точки границы. Для отрезков 2-го рода теорема справедлива; если $[u]'$ число $[u]$ соответствующее такому отрезку и ρ длина отрезка, то

$$[u]' \leqq \sqrt{3}\, A\rho.$$

Займемся отрезками 1-го рода; пусть $n' n''$ один из них, и ρ его длина (черт. 2).

Если около точки n' описать сферу радиуса d, то весь отрезок внутри сферы, так как длина его не больше d.

Построим на нормали в точке n' конус параграфа 2-го с углом растворения $2\omega_1$ и в некоторых точках границы, лежащих на отрезках 1-ой категории, из которых составлен $n'\,n''$, одинаковые с этим конусом конуса, с вершинами в этих точках и с одинаково направленными осями; такой же конус построим в точке n''.

Отложим на оси первого конуса отрезок $n'\,n_1$, равный η, и через конец его проведем прямую, параллельную $n'\,n''$, до пересечения с осью последнего конуса в n_2. Всякая точка отрезка $n_1\,n_2$ лежит внутри одного из конусов, и потому отрезок $n_1\,n_2$ не пересекается с границей; иначе можно было бы построить прямую, лежащую внутри одного из конусов и имеющую две общие точки с границей. Отрезки $n'\,n_1$ и $n''\,n_2$, кроме n' и n'', общих точек с границей не имеют.

Теорема справедлива для отрезков $n'\,n_1$, $n_1\,n_2$ и $n''\,n_2$. Если u', u_1, u_2, u'' значения u в точках n', n_1, n_2, n'', то

$$|u'-u_1|\leqq\sqrt{3}\,A\eta,\quad |u_1-u_2|\leqq\sqrt{3}\,A\rho,\quad |u''-u_2|\leqq\sqrt{3}\,A\eta,$$

$$|u'-u''|<|u'-u_1|+|u_1-u_2|+|u_2-u''|\leqq\sqrt{3}\,A\rho+2\sqrt{3}\,A\eta.$$

Если $[u]_i$ значение $[u]$, отвечающее отрезку $M'\,M''$, то, так как $[u]_i$ не больше суммы значений $[u]$, отвечающих частям отрезка $M'\,M''$,

$$[u]_i\leqq\sqrt{3}\,A\Sigma\rho+\Sigma 2\sqrt{3}\,A\eta,$$

где суммирование распространено по всем отрезкам 1-го и 2-го рода. Значит,

$$[u]_i<\sqrt{3}\,Ad+\sqrt{3}\,A\eta(s+1)<\sqrt{3}\,Ad+\frac{2\sqrt{3}\,AEd^{2-\lambda}}{1-\frac{1}{2}E^2d^{2-2\lambda}}+2\sqrt{3}\,A\eta,$$

откуда, вследствие произвольности η, заключаем:

$$[u]_i\leqq\sqrt{3}\,Ad+\frac{2\sqrt{3}\,AEd^{2-\lambda}}{1-\frac{1}{2}E^2d^{2-2\lambda}}.$$

Применяя последнее неравенство ко всем n отрезкам на $M_1\,M_2$ и подставляя вместо d его значение, получаем

$$[u]\leqq\sum_{i=1}^{i=n}[u]_i\leqq\sqrt{3}\,Adn+\frac{2\sqrt{3}\,AEnd^{2-\lambda}}{1-\frac{1}{2}E^2d^{2-2\lambda}}=\sqrt{3}\,Ar+$$

$$+\frac{1}{n^{1-\lambda}}\,\frac{2\sqrt{3}\,Ar^{2-\lambda}}{1-\frac{1}{2}E^2r^{2-2\lambda}\cdot\frac{1}{n^{2-2\lambda}}},$$

откуда, вследствие произвольности n, заключаем:

$$[u] \leqq \sqrt{3}\, Ar,$$

что и требовалось доказать.

5. Положим, что точка $M(q_1, q_2, q_3)$ перемещается по границе, причем q_1, q_2, q_3 непрерывные функции параметра τ:

$$q_1 = \varphi(\tau), \quad q_2 = \psi(\tau), \quad q_3 = \chi(\tau),$$

имеющие непрерывные производные.

Значения функций (4) в точке M будут функциями τ; докажем, что эти функции имеют производные и найдем эти производные.

Проведем доказательство для функции u.

Построим около точки M, отвечающей значению τ_0 параметра τ, сферу радиуса d_0 и дадим τ такое приращение h, чтобы точка M_1, отвечающая значению $\tau_0 + h$, была бы удалена от M на расстояние s, меньшее $\frac{d_0}{2}$. Построим нормаль к границе в точке M и через точки кривой $M\,M_1$ проведем прямые, параллельные нормали (черт. 3).

Отложив на них отрезки, равные η, построим кривую $M'\,M_1'$, тожественную с $M\,M_1$. Все точки $M'\,M_1'$, вследствие свойства (γ), лежат внутри области, ограниченной границей, и в них функция u имеет непрерывные производные по q_1, q_2, q_3.

Если углы нормали с осями координат равны α, β, γ, то ур-ние $M'\,M_1'$:

$$q_1 = \eta\cos\alpha + \varphi(\tau), \quad q_2 = \eta\cos\beta + \psi(\tau), \quad q_3 = \eta\cos\gamma + \chi(\tau).$$

Трактуя u как функцию, заданную на кривой $M'\,M_1'$, имеем:

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial u}{\partial q_1}\varphi'(\tau) + \frac{\partial u}{\partial q_2}\psi'(\tau) + \frac{\partial u}{\partial q_3}\chi'(\tau)$$

и

$$u_{M_1'} - u_{M'} = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+h} \left\{ \frac{\partial u}{\partial q_1}\varphi'(\tau) + \frac{\partial u}{\partial q_2}\psi'(\tau) + \frac{\partial u}{\partial q_3}\chi'(\tau) \right\} d\tau.$$

Но

$$|(u_{M_1} - u_M) - (u_{M_1'} - u_{M'})| \leqq |u_{M_1} - u_{M_1'}| + |u_M - u_{M'}| \leqq 2\sqrt{3}\, A\eta.$$

Далее, если

$$\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_\alpha, \quad \alpha = 1 \text{ или } \alpha = 2,$$

предел, к которому стремится $\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_{M'}$, когда M' приближается к M, то

$$\left|\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_{\alpha}\right| < A\eta^{1-\lambda};$$

вместе с тем

$$\left|\frac{\partial u}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_{M'}\right| < As^{1-\lambda},$$

откуда

$$\left|\frac{\partial u}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_{\alpha}\right| < A(\eta^{1-\lambda} + s^{1-\lambda}).$$

Из выведенных неравенств, положив в них

$$\eta = \varepsilon|h|,$$

получаем:

$$\left|\frac{u_{M_1} - u_M}{h} - \frac{1}{h}\int_{\tau_0}^{\tau_0+h}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)_{\alpha}\varphi'(\tau) + \left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)_{\alpha}\psi'(\tau) + \left(\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)_{\alpha}\chi'(\tau)\right]d\tau\right| <$$

$$< 2\sqrt{3}A\varepsilon + A(s^{1-\lambda} + \varepsilon^{1-\lambda}|h|^{1-\lambda})\frac{1}{|h|}\left|\int_{\tau_0}^{\tau_0+h}(|\varphi'(\tau)| + |\psi'(\tau)| + \chi'(\tau))\,d\tau\right|.$$

Выбирая произвольно малыми ε, h, и, следовательно, s, и замечая, что

$$\text{прд}\ \frac{1}{h}\int_{\tau_0}^{\tau_0+h}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)_{\alpha}\varphi'(\tau) + \left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)_{\alpha}\psi'(\tau) + \left(\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)_{\alpha}\chi'(\tau)\right]d\tau =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)_{\alpha}\varphi'(\tau_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)_{\alpha}\psi'(\tau_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)_{\alpha}\chi'(\tau_0),$$

из последнего неравенства заключаем, что

$$\text{прд}\ \frac{u_{M_1} - u_M}{h}_{h=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)_{\alpha}\varphi'(\tau_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)_{\alpha}\psi'(\tau_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)_{\alpha}\chi'(\tau_0).$$

В последней формуле вместо α можно безразлично ставить (1) и (2), что вполне согласно с теоремой, по которой разности

$$\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)_1,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)_1,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)_1$$

пропорциональны косинусам углов с осями координат нормали к границе в точке M.

6. Положим

$$B=\int_0^t A\,dt$$

и введем в рассмотрение функции

$$(7)\quad \begin{cases} x=q_1+\int_0^t u(q_1, q_2, q_3, \tau)\,d\tau, \quad y=q_2+\int_0^t v(q_1, q_2, q_3, \tau)\,d\tau, \\ z=q_3+\int_0^t w(q_1, q_2, q_3, \tau)\,d\tau. \end{cases}$$

Из сказанного в параграфе 3-м о функциях (4) ясно, что функции (7) непрерывны во всем пространстве (Q), что при всех значениях q_1, q_2, q_3, определяющих точку не на границе, они имеют производные и что эти производные ограничены.

Взяв, например, функцию x, имеем:

$$(8)\qquad \frac{\partial x}{\partial q_1}=1+\int_0^t \frac{\partial u}{\partial q_1}d\tau, \quad \frac{\partial x}{\partial q_2}=\int_0^t \frac{\partial u}{\partial q_2}d\tau, \quad \frac{\partial x}{\partial q_3}=\int_0^t \frac{\partial u}{\partial q_3}d\tau,$$

откуда

$$\left|\frac{\partial x}{\partial q_1}-1\right|<B, \quad \left|\frac{\partial x}{\partial q_2}\right|<B, \quad \left|\frac{\partial x}{\partial q_3}\right|<B,$$
$$\left|\frac{\partial y}{\partial q_1}\right|<B, \quad \left|\frac{\partial y}{\partial q_2}-1\right|<B, \quad \left|\frac{\partial y}{\partial q_3}\right|<B,$$
$$\left|\frac{\partial z}{\partial q_1}\right|<B, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial q_2}\right|<B, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial q_3}-1\right|<B.$$

Из тех же равенств (8) вытекает, что когда точка M приближается к точке M_0 на границе, то производные от функций (7) стремятся к определенным пределам, причем, например, если точка M стремится к M_0, оставаясь в области первой, то

$$\text{прд}\,\frac{\partial x}{\partial q_1}=1+\int_0^t\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)_1 d\tau, \quad \text{прд}\,\frac{\partial x}{\partial q_2}=\int_0^t\left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)_1 d\tau, \quad \text{прд}\,\frac{\partial x}{\partial q_3}=\int_0^t\left(\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)_1 d\tau,$$

причем разности между значениями $\frac{\partial x}{\partial q_i}$ и их пределами $\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)_1$ удовлетворяют неравенствам:

$$\left|\frac{\partial x}{\partial q_i}-\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)_1\right|<Br_0^{1-\lambda}, \qquad i=1, 2, 3.$$

Между прочим, если точки $M(q_1, q_2, q_3)$, $M_1(q_1', q_2', q_3')$ лежат по одну сторону от границ и расстояние между ними не больше d_0, то, если r это расстояние:

$$\left[\frac{\partial x}{\partial q_i}\right] < Br^{1-\lambda}, \quad \left[\frac{\partial y}{\partial q_i}\right] < Br^{1-\lambda}, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial q_i}\right] < Br^{1-\lambda}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Из самого вида функций x, y, z и их производных по q_1, q_2, q_3 ясно, что они имеют непрерывные производные по t.

Из перечисленных свойств функций (7) ясно, что все сказанное в параграфе 5-м о дифференцировании функций (4) на границе применимо и к функциям (7).

Мы имеем, например, сохраняя обозначения параграфа 5-го:

$$\frac{\partial (x)_M}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)_\alpha \varphi'(\tau) + \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)_\alpha \psi'(\tau) + \left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)_\alpha \chi'(\tau), \quad \alpha = 1 \text{ или } \alpha = 2.$$

7. Пока $B < \frac{1}{3}$, система ур-ний

$$x = q_1 + \int_0^t u(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau, \quad y = q_2 + \int_0^t v(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau,$$

$$z = q_3 + \int_0^t w(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau$$

имеет единственное решение при всех значениях x, y, z, причем в этом решении функции q_1, q_2, q_3 имеют производные по x, y, z, если точка q_1, q_2, q_3 не лежит на границе.

Дав ур-ниям (7) вид

$$q_1 = x - \int_0^t u(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau, \quad q_2 = y - \int_0^t v(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau,$$

$$q_3 = z - \int_0^t w(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau$$

и положив

$$q_1^0 = x, \; q_2^0 = y, \; q_3^0 = z,$$

полагаем:

$$q_1^{(n)} = x - \int_0^t u(q_1^{(n-1)}, q_2^{(n-1)}, q_3^{(n-1)}, \tau)\, d\tau,$$

$$q_2^{(n)} = y - \int_0^t v(q_1^{(n-1)}, q_2^{(n-1)}, q_3^{(n-1)}, \tau)\, d\tau,$$

$$q_3^{(n)} = z - \int_0^t w(q_1^{(n-1)}, q_2^{(n-1)}, q_3^{(n-1)}, \tau)\, d\tau.$$

Далее получаем, ведя выкладки для примера над q_1:

$$q_1^{(n)} - q_1^{(n-1)} =$$

$$= -\int_0^t \{u(q_1^{(n-1)}, q_2^{(n-1)}, q_3^{(n-1)}, \tau) - u(q_1^{(n-2)}, q_2^{(n-2)}, q_3^{(n-2)}, \tau)\}\, d\tau$$

и, если

$$r^2_{n-1} = (q_1^{(n-1)} - q_1^{(n-2)})^2 + (q_2^{(n-1)} - q_2^{(n-2)})^2 + (q_3^{(n-1)} - q_3^{(n-2)})^2,$$

то, по сказанному в параграфе 3-м:

$$|q_i^{(n)} - q_i^{(n-1)}| \leqq \sqrt{3}\, B r_{n-1},$$

откуда

$$r_n \leqq 3 B r_{n-1}, \quad r_n \leqq (3B)^{n-1} r_1,$$

где

$$r_1 = \sqrt{(q_1^{(1)} - x)^2 + (q_2^{(1)} - y)^2 + (q_3^{(1)} - z)^2} \leqq \sqrt{3}\, B.$$

Следовательно, члены рядов

$$\begin{aligned} q_1 &= x + (q_1^{(1)} - x) + (q_1^{(2)} - q_1^{(1)}) + \cdots + (q_1^{(n)} - q_1^{(n-1)}) + \cdots, \\ q_2 &= y + (q_2^{(1)} - y) + (q_2^{(2)} - q_2^{(1)}) + \cdots + (q_2^{(n)} - q_2^{(n-1)}) + \cdots, \qquad (9) \\ q_3 &= z + (r_3^{(1)} - z) + (q_3^{(2)} - q_3^{(1)}) + \cdots + (q_3^{(n)} - q_3^{(n-1)}) + \cdots, \end{aligned}$$

начиная со вторых, по абсолютной величине меньше членов ряда

$$\sqrt{3}\, B\left(1 + (3B) + (3B)^2 + \cdots\right),$$

сходящегося, пока $B < \frac{1}{3}$.

Функции (9) от x, y, z, t образуют решение системы (7).

Действительно, если q_1, q_2, q_3 функции (9) и

$$Q_1 = x - \int_0^t u(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau, \quad Q_2 = y - \int_0^t v(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau,$$

$$Q_3 = z - \int_0^t w(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau,$$

то, например,

$$Q_1 - q_1^{(n)} = -\int_0^t \{u(q_1, q_2, q_3, \tau) - u(q_1^{(n-1)}, q_2^{(n-1)}, q_3^{(n-1)}, \tau)\}\, d\tau$$

и

$$|Q_1 - q_1^{(n)}| < \sqrt{3}\, Br^{(0)}{}_{n-1}$$

где

$$r_{n-1}{}^{(0)} = \sqrt{(q_1 - q_1^{(n-1)})^2 + (q_2 + q_2^{(n-1)})^2 + (q_3 - q_3^{(n-1)})^2}.$$

Так как

$$q_1 = \text{прд}\, q_1^{(n-1)}, \quad q_2 = \text{прд}\, q_2^{(n-1)}, \quad q_3 = \text{прд}\, q_3^{(n-1)},$$

то, каково бы ни было положительное число ε, если

$n \geqq N$, то: $|q_1 - q_1^{(n-1)}| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|q_2 - q_2^{(n-1)}| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|q_3 - q_3^{(n-1)}| < \frac{\varepsilon}{3}$

и

$$|Q_1 - q_1^{(n)}| < B\varepsilon,$$

откуда ясно, что

$$Q_1 = \text{прд}\, q_1^{(n)} = q_1, \quad Q_2 = \text{прд}\, q_2^{(n)} = q_2, \quad Q_3 = \text{прд}\, q_3^{(n)} = q_3.$$

Решение, найденное нами, единственное.

Допустив, что функции Q_1, Q_2, Q_3 образуют некоторое решение системы (7), имеем:

$$Q_1 - q_1^{(n)} = -\int_0^t \{u(Q_1, Q_2, Q_3, \tau) - u(q_1^{(n-1)}, q_2^{(n-1)}, q_3^{(n-1)}, \tau)\}\, d\tau, \cdots,$$

откуда

$$|Q_1 - q_1^{(n)}| < \sqrt{3}\, Br^{(1)}{}_{n-1}, \quad |Q_2 - q_2^{(n)}| < \sqrt{3}\, Br^{(1)}{}_{n-1}, \quad |Q_3 - q_3^{(n)}| < \sqrt{3}\, Br^{(1)}{}_{n-1},$$

где

$$r^{(1)}_{n-1} = \sqrt{(Q_1 - q_1^{(n-1)})^2 + (Q_2 - q_2^{(n-1)})^2 + (Q_3 - q_3^{(n-1)})^2}.$$

Так как

$$|Q_1 - q_1^{(0)}| = \left| \int_0^t u(Q_1, Q_2, Q_3, \tau)\, d\tau \right| < B,$$

ясно, что

$$|Q_1 - q_1^{(n)}| < \sqrt{3}\, B (3B)^n, \cdots$$

так как

$$r_n^{(1)} < 3Br^{(1)}_{n-1} < (3B)^n r_0^{(1)}, \quad r_0^{(1)} < \sqrt{3}\, B.$$

Отсюда

$$Q_1 = \text{прд}\, q_1^{(n)} = q_1, \quad Q_2 = \text{прд}\, q_2^{(n)} = q_2, \quad Q_3 = \text{прд}\, q_3^{(n)} = q_3.$$

Из сказанного между прочим видно, что при всех x, y, z:

$$|q_1 - x| < \frac{\sqrt{3}\, B}{1 - 3B}, \quad |q_2 - y| < \frac{\sqrt{3}\, B}{1 - 3B}, \quad |q_3 - z| < \frac{\sqrt{3}\, B}{1 - 3B}.$$

Производные от q_1, q_2, q_3, например по x, находим из ур-ний:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} = 1 - \frac{\partial q_1}{\partial x} \int_0^t \frac{\partial u}{\partial q_1} d\tau - \frac{\partial q_2}{\partial x} \int_0^t \frac{\partial u}{\partial q_2} d\tau - \frac{\partial q_3}{\partial x} \int_0^t \frac{\partial u}{\partial q_3} d\tau,$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial x} = \quad - \frac{\partial q_1}{\partial x} \int_0^t \frac{\partial v}{\partial q_1} d\tau - \frac{\partial q_2}{\partial x} \int_0^t \frac{\partial v}{\partial q_2} d\tau - \frac{\partial q_3}{\partial x} \int_0^t \frac{\partial v}{\partial q_3} d\tau,$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial x} = \quad - \frac{\partial q_1}{\partial x} \int_0^t \frac{\partial w}{\partial q_1} d\tau - \frac{\partial q_2}{\partial x} \int_0^t \frac{\partial w}{\partial q_2} d\tau - \frac{\partial q_3}{\partial x} \int_0^t \frac{\partial w}{\partial q_3} d\tau.$$

Положив

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} - 1 = q_x,$$

из последних ур-ний имеем

$$|q_x| < B|q_x| + B\left|\frac{\partial q_2}{\partial x}\right| + B\left|\frac{\partial q_3}{\partial x}\right| + B,$$

$$\left|\frac{\partial q_2}{\partial x}\right| < B|q_x| + B\left|\frac{\partial q_2}{\partial x}\right| + B\left|\frac{\partial q_3}{\partial x}\right| + B,$$

$$\left|\frac{\partial q_3}{\partial x}\right| < B|q_x| + B\left|\frac{\partial q_2}{\partial x}\right| + B\left|\frac{\partial q_3}{\partial x}\right| + B$$

и

$$(1-B)|q_x| - \quad B\left|\frac{\partial q_2}{\partial x}\right| - \quad B\left|\frac{\partial q_3}{\partial x}\right| < B,$$

$$-B\,|q_x| + (1-B)\left|\frac{\partial q_2}{\partial x}\right| - \quad B\left|\frac{\partial q_3}{\partial x}\right| < B,$$

$$-B\,|q_x| - \quad B\left|\frac{\partial q_2}{\partial x}\right| + (1-B)\left|\frac{\partial q_3}{\partial x}\right| < B.$$

Так как определитель последней системы ур-ний равен $1-3B$ и миноры его

$$1-2B, \quad B, \quad B$$

пока $B<\frac{1}{3}$ положительны, имеем

$$(1-3B)|q_x| < B, \quad (1-3B)\left|\frac{\partial q_2}{\partial x}\right| < B, \quad (1-3B)\left|\frac{\partial q_3}{\partial x}\right| < B,$$

то есть

$$\left|\frac{\partial q_1}{\partial x}-1\right| < \frac{B}{1-3B}, \quad \left|\frac{\partial q_2}{\partial x}\right| < \frac{B}{1-3B}, \quad \left|\frac{\partial q_3}{\partial x}\right| < \frac{B}{1-3B},$$

$$\left|\frac{\partial q_1}{\partial y}\right| < \frac{B}{1-3B}, \quad \left|\frac{\partial q_2}{\partial y}-1\right| < \frac{B}{1-3B}, \quad \left|\frac{\partial q_3}{\partial y}\right| < \frac{B}{1-3B},$$

$$\left|\frac{\partial q_1}{\partial z}\right| < \frac{B}{1-3B}, \quad \left|\frac{\partial q_2}{\partial z}\right| < \frac{B}{1-3B}, \quad \left|\frac{\partial q_3}{\partial z}-1\right| < \frac{B}{1-3B}.$$

8. Если

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1}, & \frac{\partial x}{\partial q_2}, & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1}, & \frac{\partial y}{\partial q_2}, & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1}, & \frac{\partial z}{\partial q_2}, & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial x}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_3}\right|,$$

то

$$\frac{\partial q_i}{\partial x}=\frac{1}{J}\,\text{мин.}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right), \quad \frac{\partial q_i}{\partial y}=\frac{1}{J}\,\text{мин.}\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right), \quad \frac{\partial q_i}{\partial z}=\frac{1}{J}\,\text{мин.}\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right).$$

Дифференцируя J, получаем:

$$\frac{\partial J}{\partial t}=\left|\frac{\partial u}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_2}, \frac{\partial z}{\partial q_3}\right| + \left|\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial v}{\partial q_2}, \frac{\partial z}{\partial q_3}\right| + \left|\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_2}, \frac{\partial w}{\partial q_3}\right| =$$

$$=J\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial z}\right)\right\}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial t}\right| < 3A\left\{1 + \frac{3B}{1-3B}\right\} = \frac{3A}{1-3B} = \frac{3\frac{\partial B}{\partial t}}{1-3B}$$

и

$$\log|J| = \int_0^t \frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial t}dt, \quad |\log|J|| < \int_0^t \frac{3\,dB}{1-3B} = \log\frac{1}{1-3B},$$

так как

$$J = 1 \text{ при } t = 0.$$

Из последнего неравенства имеем

$$1 - 3B < |J| < \frac{1}{1-3B} \text{ и } |J| = J.$$

Между прочим из выведенных формул вытекает

$$\frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

9. Из сказанного в параграфе 7-м ясно, что пока $B < \frac{1}{3}$, система ур-ний

$$p_1 + \int_0^t u(p_1, p_2, p_3, \tau)\,d\tau = q_1 + \int_0^t u(q_1, q_2, q_3, \tau)\,d\tau,$$

(10) $$p_2 + \int_0^t v(p_1, p_2, p_3, \tau)\,d\tau = q_2 + \int_0^t v(q_1, q_2, q_3, \tau)\,d\tau,$$

$$p_3 + \int_0^t w(p_1, p_2, p_3, \tau)\,d\tau = q_3 + \int_0^t w(q_1, q_2, q_3, \tau)\,d\tau$$

имеет единственное решение

$$p_1 = q_1, \quad p_2 = q_2, \quad p_3 = q_3.$$

Обобщая, в виду дальнейшего, это утверждение, введем в рассмотрение новые функции

(4') $$u_1(q_1, q_2, q_3, t), \quad v_1(q_1, q_2, q_3, t), \quad w_1(q_1, q_2, q_3, t),$$

удовлетворяющие всем девяти условиям, поставленным в параграфе 3-м для функций (4), и рассмотрим систему ур-ний:

$$(10')\quad \begin{cases} \theta\left(p_1 - q_1 + \int\limits_0^t [u(p_1, p_2, p_3, \tau) - u(q_1, q_2, q_3, \tau)]\, d\tau\right) + \\ + \vartheta\left(p_1 - q_1 + \int\limits_0^t [u_1(p_1, p_2, p_3, \tau) - u_1(q_1, q_2, q_3, \tau)]\, d\tau\right) = 0, \\ \theta\left(p_2 - q_2 + \int\limits_0^t v(p_1, p_2, p_3, \tau) - v(q_1, q_2, q_3, \tau)]\, d\tau\right) + \\ + \vartheta\left(p_2 - q_2 + \int\limits_0^t [v_1(p_1, p_2, p_3, \tau) - v_1(q_1, q_2, q_3, \tau)]\, d\tau\right) = 0, \\ \theta\left(p_3 - q_3 + \int\limits_0^t [w(p_1, p_2, p_3, \tau) - w(q_1, q_2, q_3, \tau)]\, d\tau\right) + \\ + \vartheta\left(p_3 - q_3 + \int\limits_0^t [w_1(p_1, p_2, p_3, \tau) - w_1(q_1, q_2, q_3, \tau)]\, d\tau\right) = 0, \end{cases}$$

в которой θ и ϑ положительные функции встречающихся аргументов, удовлетворяющие условию

$$\theta + \vartheta = 1.$$

Пока $B < \frac{1}{3}$, система (10') имеет единственное решение

$$p_1 = q_1, \quad p_2 = q_2, \quad p_3 = q_3.$$

Действительно, из первого из ур-ний (10') имеем, например:

$$p_1 - q_1 = -\theta \int\limits_0^t [u(p_1, p_2, p_3, \tau) - u(q_1, q_2, q_3, \tau)]\, dt -$$

$$- \vartheta \int\limits_0^t [u_1(p_1, p_2, p_3, \tau) - u_1(q_1, q_2, q_3, \tau)]\, dt$$

и

$$|p_1 - q_1| \leqq \theta\sqrt{3}\, Br + \vartheta\sqrt{3}\, Br = \sqrt{3}\, Br,$$

где

$$r = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}.$$

Из последнего неравенства и аналогичных ему, получаемых из остальных ур-ний (10′), получаем

$$r \leqq 3\,Br,$$

что требует, при $B < \frac{1}{3}$:

$$r = 0, \text{ то есть } p_1 = q_1,\ p_2 = q_2,\ p_3 = q_3.$$

10. Вообразим себе, для наглядности, что x, y, z суть прямоугольные Декартовы координаты точки в пространстве (Ξ).

Равенства

$$(7)\qquad x = q_1 + \int_0^t u(q_1, q_2, q_3, \tau)\,d\tau,$$

$$y = q_2 + \int_0^t v(q_1, q_2, q_3, \tau)\,d\tau, \quad z = q_3 + \int_0^t w(q_1, q_2, q_3, \tau)\,d\tau$$

приводят, при всяком t, любой точке пространства (Q) в соответствие некоторую точку пространства (Ξ), которая перемещается в пространстве (Ξ) с течением времени.

При $t = 0$ фигура из точек (q_1, q_2, q_3) в пространстве (Q) тожественна с фигурой из соответствующих точек (x, y, z) в пространстве (Ξ).

Если $(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)})$, $(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)})$ две точки пространства (Q), расстояние между которыми r, а (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) две соответствующие им точки в пространстве (Ξ), расстояние между которыми обозначим через ρ, то

$$x_2 - x_1 = q_1^{(2)} - q_1^{(1)} + X, \quad y_2 - y_1 = q_2^{(2)} - q_2^{(1)} + Y, \quad z_2 - z_1 = q_3^{(2)} - q_3^{(1)} + Z,$$

где

$$X = \int_0^t \left(u(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)}, \tau) - u(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)}, \tau)\right) d\tau,$$

$$Y = \int_0^t \left(v(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)}, \tau) - v(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)}, \tau)\right) d\tau,$$

$$Z = \int_0^t \left(w(q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, q_3^{(2)}, \tau) - w(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)}, \tau)\right) d\tau.$$

На $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ можно смотреть как на проекции замыкающей ломаной, составляющие которой имеют проекциями $q_1^{(2)} - q_1^{(1)}$, $q_2^{(2)} - q_2^{(1)}$, $q_3^{(2)} - q_3^{(1)}$ и X, Y, Z и писать

$$r - r^{(0)} \leqq \rho \leqq r + r^{(0)},$$

где

$$r^{(0)} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Но

$$|X| \leqq \sqrt{3}\,Br, \quad |Y| \leqq \sqrt{3}\,Br, \quad |Z| \leqq \sqrt{3}\,Br, \quad r^{(0)} \leqq 3\,Br$$

и, значит,

$$r(1 - 3B) \leqq \rho \leqq r(1 + 3B), \quad \frac{\rho}{1 + 3B} \leqq r \leqq \frac{\rho}{1 - 3B}.$$

11. Границам в пространстве (Q) соответствуют в пространстве (Ξ) некоторые поверхности, перемещающиеся и деформирующиеся с течением времени t.

В любой момент t все эти поверхности находятся внутри сферы радиуса

$$\sqrt{3}\,B + R^0(1 + 3B),$$

описанной около начала координат пространства (Ξ), так как вне сферы радиуса $R^0(1 + 3B)$, описанной около точки

$$\int_0^t u(0, 0, 0, \tau)\,d\tau, \quad \int_0^t v(0, 0, 0, \tau)\,d\tau, \quad \int_0^t w(0, 0, 0, \tau)\,d\tau,$$

расстояние которой от начала координат пространства (Ξ) менее $\sqrt{3}B$, уже нет точек, соответствующих границам пространства (Q).

Эти поверхности мы будем называть границами пространства (Ξ).

12. Внутри каждой сферы радиуса (d_0), описанной около точки M_0 на границе, границу, как вытекает из сказанного в параграфе 2-м, можно определить ур-ниями вида

$$(11) \qquad q_1 = \varphi(\alpha, \beta), \quad q_2 = \psi(\alpha, \beta), \quad q_3 = \chi(\alpha, \beta),$$

где α и β некоторые параметры, например, равные введенным в параграфе 2-м ξ и η, если функции φ, ψ, χ составлены применением формул преобразования координат от системы, положенной в основание при определении пространства (Q), к системе, положенной в параграфе 2-м.

На основании свойств (α) и (β) границ, можно считать, что φ, ψ, χ имеют непрерывные производные по α и β.

Косинусы углов нормали к границе с осями координат равны отношениям определителей таблицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial q_1}{\partial \alpha}, & \frac{\partial q_2}{\partial \alpha}, & \frac{\partial q_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial q_1}{\partial \beta}, & \frac{\partial q_2}{\partial \beta}, & \frac{\partial q_3}{\partial \beta} \end{matrix} \right\|$$

к квадратному корню из суммы квадратов этих определителей, равному

$$\sqrt{h_1 h_2 - l^2},$$

где h_1, h_2, l Гауссовы параметры границы, то есть где:

$$h_1 = \sum \left(\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}\right)^2, \quad h_2 = \sum \left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta}\right)^2, \quad l = \sum \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial \beta}.$$

Так как ур-ние границы пространства (Ξ) получается из ур-ний (7) заменою в них q_1, q_2, q_3 их значениями (11) и так как

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha}, & \frac{\partial y}{\partial \alpha}, & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta}, & \frac{\partial y}{\partial \beta}, & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\frac{\partial q_3}{\partial \alpha}, & \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)\frac{\partial q_3}{\partial \alpha}, & \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)\frac{\partial q_3}{\partial \alpha} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\frac{\partial q_3}{\partial \beta}, & \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)\frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)\frac{\partial q_3}{\partial \beta}, & \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)\frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)\frac{\partial q_3}{\partial \beta} \end{matrix} \right\|$$

вспомнив формулы в начале параграфа 8-го, получаем:

$$\sqrt{H_1 H_2 - \Lambda^2} \cos Nx =$$
$$= \left(\cos Nq_1 \left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right) + \cos Nq_2 \left(\frac{\partial q_2}{\partial x}\right) + \cos Nq_3 \left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\right) \right) J \sqrt{h_1 h_2 - l^2}$$
$$\sqrt{H_1 H_2 - \Lambda^2} \cos Ny =$$
$$= \left(\cos Nq_1 \left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right) + \cos Nq_2 \left(\frac{\partial q_2}{\partial y}\right) + \cos Nq_3 \left(\frac{\partial q_3}{\partial y}\right) \right) J \sqrt{h_1 h_2 - l^2}$$
$$\sqrt{H_1 H_2 - \Lambda^2} \cos Nz =$$
$$= \left(\cos Nq_1 \left(\frac{\partial q_1}{\partial z}\right) + \cos Nq_2 \left(\frac{\partial q_2}{\partial z}\right) + \cos Nq_3 \left(\frac{\partial q_3}{\partial z}\right) \right) J \sqrt{h_1 h_2 - l^2}$$

где H_1, H_2, Λ Гауссовы параметры границы пространства (Ξ).

Из последних формул ясно, что во всякой точке границы (Ξ) можно провести к ней касательную плоскость.

13. Примем во внимание две точки $M(q_1, q_2, q_3)$ и $M'(q_1', q_2', q_3')$ пространства (Q) и соответствующие две точки $m(x, y, z)$ и $m'(x', y', z')$ пространства (Ξ).

Из формул параграфа 6-го имеем:

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right)_m - \left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right)_{m'} = -\left\{\left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right)_m - \left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right)_{m'}\right)\int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)_M d\tau + \right.$$

$$+ \left(\left(\frac{\partial q_2}{\partial x}\right)_m - \left(\frac{\partial q_2}{\partial x}\right)_{m'}\right)\int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)_M d\tau + \left(\left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\right)_m - \left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\right)_{m'}\right)\int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)_M d\tau +$$

$$+ \left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right)_{m'}\int_0^t \left(\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)_M - \left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)_{M'}\right) d\tau + \left(\frac{\partial q_2}{\partial x}\right)_{m'}\int_0^t \left(\left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)_M - \left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)_{M'}\right) d\tau +$$

$$\left. + \left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\right)_{m'}\int_0^t \left(\left(\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)_M - \left(\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)_{M'}\right) d\tau \right\}$$

и две аналогичные формулы для разностей функций

$$\frac{\partial q_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial q_3}{\partial x}.$$

Обозначая знаком $[f(x, y, z, t)]$ абсолютную величину разности между значениями функции f в точках m и m', находим:

$$\left[\frac{\partial q_1}{\partial x}\right] < \left[\frac{\partial q_1}{\partial x}\right] B + \left[\frac{\partial q_2}{\partial x}\right] B + \left[\frac{\partial q_3}{\partial x}\right] B + \frac{Br^{1-\lambda}}{1-3B},$$

$$\left[\frac{\partial q_2}{\partial x}\right] < \left[\frac{\partial q_1}{\partial x}\right] B + \left[\frac{\partial q_2}{\partial x}\right] B + \left[\frac{\partial q_3}{\partial x}\right] B + \frac{Br^{1-\lambda}}{1-3B},$$

$$\left[\frac{\partial q_3}{\partial x}\right] < \left[\frac{\partial q_1}{\partial x}\right] B + \left[\frac{\partial q_2}{\partial x}\right] B + \left[\frac{\partial q_3}{\partial x}\right] B + \frac{Br^{1-\lambda}}{1-3B},$$

откуда, рассуждая как в конце параграфа 7-го, получаем, вспомнив формулы параграфа 10-го:

$$\left[\frac{\partial q_1}{\partial x}\right] < \frac{Br^{1-\lambda}}{(1-3B)^2} < \frac{B\rho^{1-\lambda}}{(1-3B)^{3-\lambda}}, \quad \left[\frac{\partial q_i}{\partial y}\right] < \frac{B\rho^{1-\lambda}}{(1-3B)^{3-\lambda}},$$

$$\left[\frac{\partial q_i}{\partial z}\right] < \frac{B\rho^{1-\lambda}}{(1-3B)^{3-\lambda}}.$$

Обозначив отношение

$$\frac{\sqrt{H_1 H_2 - \Lambda^2}}{J\sqrt{h_1 h_2 - l^2}}$$

одной буквой θ, из формул параграфа 12-го имеем:

$$[\theta \cos Nx] < [\cos Nq_1]\left|\frac{\partial q_1}{\partial x}\right|_m + [\cos Nq_2]\left|\frac{\partial q_2}{\partial x}\right|_m + [\cos Nq_3]\left|\frac{\partial q_3}{\partial x}\right|_m +$$
$$+ |\cos Nq_1|_{M'}\left[\frac{\partial q_1}{\partial x}\right] + |\cos Nq_2|_{M'}\left[\frac{\partial q_2}{\partial x}\right] + |\cos Nq_3|_{M'}\left[\frac{\partial q_3}{\partial x}\right]$$

и

$$[\theta \cos Nx] \leqq \mathrm{E}r^{1-\lambda}\frac{1}{1-3B} + \sqrt{3}\,\frac{Br^{1-\lambda}}{(1-3B)^2} < \mathrm{E}_1\rho^{1-\lambda}$$

где

$$\mathrm{E}_1 = \left(\frac{\mathrm{E}}{1-3B} + \frac{\sqrt{3}\,B}{(1-3B)^2}\right)\cdot\frac{1}{(1-3B)^{1-\lambda}},$$

так как

$$[\cos Nq_1] = 2\left|\sin\frac{Nq_1' - Nq_1}{2}\right|\left|\sin\frac{Nq_1' + Nq_1}{2}\right| < 2\cdot\frac{\mathrm{E}r^{1-\lambda}}{2} = \mathrm{E}r^{1-\lambda}.$$

Также получим:

$$[\theta \cos Ny] < \mathrm{E}_1\rho^{1-\lambda}, \quad [\theta \cos Nz] < \mathrm{E}_1\rho^{1-\lambda}.$$

Далее из формул параграфа 12-го имеем:

$$\theta \cos Nx = \cos Nq_1 + \cos Nq_1\left(\frac{\partial q_1}{\partial x} - 1\right) + \cos Nq_2\frac{\partial q_2}{\partial x} + \cos Nq_3\frac{\partial q_3}{\partial x} =$$
$$= \cos Nq_1 + \vartheta_1\sqrt{\left(\frac{\partial q_1}{\partial x} - 1\right)^2 + \left(\frac{\partial q_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\right)^2},$$

где $-1 < \vartheta_1 < +1$, так как выражение вида

$$a\xi + b\eta + c\zeta \quad \text{при} \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

заключается между

$$-\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Также получим:

$$\theta \cos Ny = \cos Nq_2 + \vartheta_2\sqrt{\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_2}{\partial y} - 1\right)^2 + \left(\frac{\partial q_3}{\partial y}\right)^2},$$

$$\theta \cos Nz = \cos Nq_3 + \vartheta_3\sqrt{\left(\frac{\partial q_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_3}{\partial z} - 1\right)^2}$$

и, рассуждая, как в параграфе 10-м, находим:

$$\theta > 1 - r',$$

где

$$r'^2 = \vartheta_1^2\left[\left(\frac{\partial q_1}{\partial x} - 1\right)^2 + \left(\frac{\partial q_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\right)^2\right] + \vartheta_2^2\left[\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_2}{\partial y} - 1\right)^2 + \left(\frac{\partial q_3}{\partial y}\right)^2\right] +$$
$$+ \vartheta_3^2\left[\left(\frac{\partial q_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_3}{\partial z} - 1\right)^2\right] < \frac{9B^2}{(1-3B)^2},$$

откуда

$$\theta > \frac{1-6B}{1-3B}.$$

Обозначая через N' направление нормали в точке m', а через θ' значение θ в этой точке, из выведенных выше формул имеем:

$$\theta' \cos N'x = \theta \cos Nx + \vartheta_1 E_1 \rho^{1-\lambda}, \quad \theta' \cos N'y = \theta \cos Ny + \vartheta_2 E_1 \rho^{1-\lambda},$$
$$\theta' \cos N'z = \theta \cos Nz + \vartheta_3 E_1 \rho^{1-\lambda}, \quad |\vartheta| < 1.$$

Из последних формул ясно, что отрезок длины θ', расположенный на нормали N', может быть трактуем как замыкающая двух отрезков: отрезка θ, расположенного на нормали N, и отрезка, проекции которого на оси

$$\vartheta_1 E_1 \rho^{1-\lambda}, \quad \vartheta_2 E_1 \rho^{1-\lambda} \quad \vartheta_3 E_1 \rho^{1-\lambda}.$$

Обозначая через L этот отрезок и его длину, имеем:

$$L < \sqrt{3}\, E_1 \rho^{1-\lambda}.$$

Если α угол между направлениями L и N', то (черт. 4)

$$\sin NN' = \frac{L}{\theta} \sin\alpha$$

и, считая, что B меньше $\frac{1}{6}$,

$$|\sin NN'| < \frac{L}{\theta} < \frac{\sqrt{3}(1-3B)}{1-6B} E_1 \rho^{1-\lambda}.$$

Отсюда,

$$(NN') = NN' \frac{\sin NN'}{\sin NN'} < \frac{\pi}{2} \sin NN' < \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{3}\,(1-3B)}{1-6B} E_1 \rho^{1-\lambda} <$$
$$< \frac{3\,(1-3B)}{1-6B} E_1 \rho^{1-\lambda}$$

и

(12) $$(NN') < H\rho^{1-\lambda},$$

где

$$H = \frac{3(1-3B)}{1-6B} E_1.$$

Из неравенства (12) вытекают:

$$[\cos Nx] < H\rho^{1-\lambda}, \quad [\cos Ny] < H\rho^{1-\lambda}, \quad [\cos Nz] < H\rho^{1-\lambda}.$$

14. Проведем в точке $M(q_1^0, q_2^0, q_3^0)$ границы пространства (Q) линию

(13) $$q_1 - q_1^0 = \varphi(q_3) - \varphi(q_3^0), \quad q_2 - q_2^0 = \psi(q_3) - \psi(q_3^0).$$

Линии (13) в пространстве (Ξ) соответствует линия, проходящая через точку $m(x_0, y_0, z_0)$, соответствующую точке M, ур-нию которой можно дать вид:

(13′) $$x - x_0 = q_1 - q_1^0 + X, \quad y - y_0 = q_1 - q_2^0 + Y, \quad z - z_0 = q_3 - q_3^0 + Z,$$

где

(14) $$X = \int_0^t \left(u(q_1, q_2, q_3, \tau) - u(q_1^0, q_2^0, q_3^0, \tau)\right) d\tau, \quad Y = \int_0^t (v - v_0)\, d\tau,$$

$$Z = \int_0^t (w - w_0)\, d\tau,$$

подразумевая под q_1, q_2, q_3 числа (13).

Положим, что координатные оси в пространстве (Ξ) одинаково направлены с осями пространства (Q).

Возьмем на линии (13) точку $M'(q_1, q_2, q_3)$, на линии (13′) соответствующую точку $m'(x, y, z)$ и сравним направление MM' с направлением mm'.

Отрезок, проекции которого на оси координат равны

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0,$$

можно трактовать как замыкающую двух отрезков, проекции на оси которых:

$$q_1 - q_1^0, \quad q_2 - q_2^0, \quad q_3 - q_3^0 \quad \text{и} \quad X, Y, Z.$$

Положим

$$r = \sqrt{(q_1 - q_1^0)^2 + (q_2 - q_2^0)^2 + (q_3 - q_3^0)^2}, \quad r^0 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Из формул (14) имеем

$$|X| \leqq \sqrt{3}\, Br, \quad |Y| \leqq \sqrt{3}\, Br, \quad |Z| \leqq \sqrt{3}\, Br$$

и

$$r^0 \leqq 3Br.$$

Если δ угол между направлениями MM' и mm', а α угол между направлениями mm' и r^0, то (черт. 5)

$$\sin\delta = \frac{r^0}{r}\sin\alpha, \quad \sin\delta < \frac{r^0}{r} < 3B.$$

Если

$$3B < \sin\frac{\omega}{2}, \tag{15}$$

то

$$\delta < \frac{\omega}{2}.$$

Условие (15) ограничивает B, так как $\sin\frac{\omega}{2}$ не превышает $\frac{\sqrt{2}}{2}$; мы уже предположили, что $B < \frac{1}{6}$; в дальнейшем мы будем считать, что

$$B < \frac{1}{9}. \tag{16}$$

При таком предположении о B достаточно считать, что

$$\omega > 40^\circ, \quad \mathrm{E}d_0^{1-\lambda} < 0{,}65,$$

что мы и условились уже делать.

Заметим, имея в виду дальнейшее, что угол ω превзойдет 65°, если мы в два раза уменьшим $\mathrm{E}d_0^{1-\lambda}$.

Касательным к границе (Q) соответствуют линии, касательные к границе (Ξ).

Вообразим себе касательную плоскость к границе (Q) в центре сферы условия (γ) и касательную плоскость к границе (Ξ) в соответствующей точке, а также прямую, расположенную в плоскости, касательной к границе (Q), и перпендикулярную к линии пересечения плоскостей. Этой касательной к границе (Q) будет соответствовать кривая, касательная к границе (Ξ), и угол α между этими касательными будет меньше $\frac{\omega}{2}$; значит, угол между касательными плоскостями будет подавно меньше $\frac{\omega}{2}$, и нормали в этих соответ-

ствующих точках будут наклонены друг к другу под углом, меньшим $\frac{\omega}{2}$ (черт. 6).

Отсюда ясно, что прямая (1), проходящая через точку m на границе (Ξ) и параллельная нормали в точке, соответствующей центру сферы радиуса d_0 в пространстве (Q), имеет в пространстве (Q) соответствующую кривую (2), целиком лежащую внутри конуса с углом расстворения 2ω, вершиной в M и осью, параллельной нормали в центре сферы условия (γ). Но такая линия пересекает границу внутри сферы только в одной точке M. Значит, и указанная прямая пересечет границу (Ξ) только в точке m, и граница (Ξ) удовлетворяет условиям А. М. Ляпунова (черт. 7).

Сфера радиуса d_0, описанная около точки M_0 на границе (Q), преобразуется в поверхность, расстояния точек которой от точки m_0, соответствующей M_0, не меньше $d_0(1 - 3B)$.

Следовательно за сферу, заменяющую сферу (d_0) пространства (Q), можно в пространстве (Ξ) брать сферу с радиусом

$$d = d_0(1 - 3B).$$

Мы будем считать, что d_0 настолько мало, что угол между нормалями внутри сфер радиуса d в пространстве (Ξ) во всяком случае не превосходит $\frac{\pi}{3}$ и соблюдено неравенство

(17) $$Hd^{1-\lambda} < 0{,}5,$$

при котором угол ω больше $50°$.

15. Во всем дальнейшем множители, не зависящие от t при условии (16) и не зависящие от выбора функций (4) и вида функции A, мы будем безразлично обозначать буквами $a, b, c, \ldots$, иногда снабжая их значками и оставляя за собой возможность все такие множители в неравенствах заменять бо̀льшим из них.

Например, соотношение параграфа 10-го мы можем написать так:

$$\frac{1}{a} < J < a,$$

понимая под a число $\frac{3}{2}$.

Подобно этому, соотношение пар-фа 10-го запишем так:

$$\rho < ar, \quad r < b\rho,$$

считая

$$a = \frac{4}{3}, \quad b = \frac{3}{2};$$

соотношениям параграфа 13-го дадим вид

$$\mathrm{E}_1 = a_1 \mathrm{E} + b_1, \quad H = c\mathrm{E}_1,$$

где

$$a_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1-\lambda}, \quad b_1 = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{1-\lambda}, \quad c = 6$$

и так далее.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Лемма о вторых производных объемного интеграла.

1. Положим, что около точки $M^{(0)}$ границы пространства (Ξ) описана сфера радиуса d.

Рассмотрим область, ограниченную границей и поверхностью сферы, по одну сторону от границы и распространим в интеграле

$$(1) \qquad P = \int \frac{d\omega}{r},$$

где

$$d\omega = d\xi\, d\eta\, d\zeta, \qquad r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

интегрирование по этой области, обозначая ее через (D).

Составим сначала первые производные от P по x, y, z.

Мы имеем:

$$(2) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} d\omega = -\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} d\omega = -\int \frac{\cos Nx}{r} d\sigma,$$

где последнее интегрирование распространено по поверхности, ограничивающей область (D).

Возможность приложения примененной элементарной формулы к рассматриваемой области вне сомнений, хотя элементарный вывод ее предполагает, что прямые, параллельные оси OX, пересекают границу в конечном числе точек.

Было установлено, именно, в параграфе 2-м первой главы, что на нормали поверхности, удовлетворяющей условиям А. М. Ляпунова, можно по-

строить, как на оси, конус, обладающий свойством: прямые, параллельные прямым, проходящим через вершину и расположенным внутри конуса, пересекают поверхность внутри сферы (d) только в одной точке.

Выбрав три такие прямые за координатные оси и применив элементарные формулы к преобразованному интегралу, мы по возвращении к старым переменным получим формулу (2).

Таким же образом получим:

$$(2') \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\int \frac{\cos Ny}{r} d\sigma, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\int \frac{\cos Nz}{r} d\sigma.$$

2. Если точка $M(x, y, z)$ не лежит на границе области (D), то в ней

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\int \frac{\cos Nx \cos rx}{r^2} d\sigma,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = -\int \frac{\cos Nx \cos ry}{r^2} d\sigma = -\int \frac{\cos Ny \cos rx}{r^2} d\sigma,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} = -\int \frac{\cos Nx \cos rz}{r^2} d\sigma = -\int \frac{\cos Nz \cos rx}{r^2} d\sigma,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\int \frac{\cos Ny \cos ry}{r^2} d\sigma,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = -\int \frac{\cos Ny \cos rz}{r^2} d\sigma = -\int \frac{\cos Nz \cos ry}{r^2} d\sigma,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -\int \frac{\cos Nz \cos rz}{r^2} d\sigma.$$

Под знаками интегралов (3) нельзя вместо координат точки $M(x, y, z)$ подставить координаты точки на границе.

Введем в рассмотрение числа, которые мы будем называть значениями вторых производных от P по x, y, z на границе и обозначать знаками

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right), \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\right), \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}\right), \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right), \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}\right), \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right),$$

отличая их от чисел, обозначенных нами знаками

$$(4') \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_\alpha, \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\right)_\alpha, \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}\right)_\alpha, \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_\alpha, \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}\right)_\alpha, \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)_\alpha, \quad \alpha=1 \text{ или } \alpha=2,$$

под которыми мы условились понимать пределы, к которым стремятся функции (3), когда точка M стремится к точке M_0 на границе, и существование которых мы установим в этой главе.

3. Возьмем на границе точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, расстояние которой от точки M^0 не более $\frac{d}{2}$, и перенесем в нее начало координат, выбрав за ось $M_0 Z^0$ нормаль к границе в точке M_0 и направив оси $M_0 X^0$ и $M_0 Y^0$ как-нибудь в плоскости, касательной к границе в M_0.

Косинусы углов между старыми и новыми осями даны таблицей

	X^0	Y^0	Z^0
X	a_1	a_2	a_3
Y	b_1	b_2	b_3
Z	c_1	c_2	c_3

Если для определенности мы положим, что P^0 значение P в новых координатах, то предполагая, что точка не на границе:

$$(5)\quad \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} P}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} a_1 + \frac{\partial}{\partial y^0} a_2 + \frac{\partial}{\partial z^0} a_3\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^0} b_1 + \frac{\partial}{\partial y^0} b_2 + \frac{\partial}{\partial z^0} b_3\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial x^0} c_1 + \frac{\partial}{\partial y^0} c_2 + \frac{\partial}{\partial z^0} c_3\right)^\gamma P^0.$$
$$\alpha+\beta+\gamma=2$$

4. Рассмотрим числа

$$\left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{02}}\right) = -\int \frac{\cos Nx^0 \cos r_0 x^0}{r_0^2}\, d\sigma, \quad \left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial x^0 \partial y^0}\right) = -\int \frac{\cos Nx^0 \cos r_0 y^0}{r_0^2}\, d\sigma,$$
$$(6)\left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial x^0 \partial z^0}\right) = -\int \frac{\cos Nx^0 \cos r_0 N_0}{r_0^2}\, d\sigma, \quad \left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial y^{02}}\right) = -\int \frac{\cos Ny^0 \cos r_0 y^0}{r_0^2}\, d\sigma,$$
$$\left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial y^0 \partial z^0}\right) = -\int \frac{\cos Ny^0 \cos r_0 N_0}{r_0^2}\, d\sigma, \quad \left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial z^{02}}\right) = -\int \frac{\cos NN^0 \cos r_0 N_0}{r_0^2}\, d\sigma,$$

где r_0 расстояние от точки M_0 до переменной точки на границе области (D).

Интегралы, стоящие в правых частях равенств (6), все абсолютно сходящиеся.

Действительно, в первых пяти из них

$$|\cos Nx^0| < Hr_0^{1-\lambda}, \quad |\cos Ny^0| < Hr_0^{1-\lambda},$$

так как

$$\cos N_0 x^0 = 0, \quad \cos N_0 y^0 = 0.$$

Если

$$\zeta = \varphi(\xi, \eta)$$

ур-ние границы вблизи точки M_0, то

$$\cos r_0 N_0 = \frac{\zeta}{r_0}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -\frac{\cos Nx^0}{\cos NN_0}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\frac{\cos Ny^0}{\cos NN_0},$$

причем, конечно, все эти равенства действительны пока

$$\xi^2 + \eta^2 \leqq d^2.$$

Так как числители последних дробей равны нулю в точке M_0, как только-что указано, и

(7) $$\cos NN_0 > \frac{1}{2},$$

ибо внутри сферы (d), как мы условились в параграфах 1-м и 14-м главы первой, угол между двумя нормалями всегда меньше 60^0, то

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right| = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right] < 2Hr_0^{1-\lambda}, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right| = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right] < 2Hr_0^{1-\lambda}$$

и

(8) $$|\zeta| = |\varphi(\xi, \eta)| = |\varphi(\xi, \eta) - \varphi(0, 0)| =$$

$$= \left|\xi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_1 + \eta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_1\right| < 2Hr_1^{1-\lambda}\{|\xi| + |\eta|\} < 2\sqrt{2}\,Hr_1^{1-\lambda}\rho,$$

где ρ проекция r_0 на плоскость $M_0X^0Y^0$, а r_1 расстояние от M_0 до точки M^1, расположенной между точкой M_0 и переменной точкой $M(\xi, \eta, \zeta)$, проекция которой на плоскость $M_0X^0Y^0$ лежит на отрезке ρ.

Так как хорда M_0M^1 пересекает границу, то пока расстояние r_1 меньше d, хорда лежит вне конуса с углом растворения 2ω, построенного на нормали в M_0 как на оси. Значит угол α между r_1 и плоскостью $M_0X^0Y^0$ менее $\frac{\pi}{2} - \omega$, и косинус этого угла α больше $\sin\omega$, то есть согласно с предположением 17-м параграфа 14-го главы первой, больше $\frac{1}{2}$. Значит, если ρ_1 проекция r_1 на плоскость $M_0X^0Y^0$, то

$$r_1 = \frac{\rho_1}{\cos\alpha} < 2\rho_1 < 2\rho$$

и формуле (8) можно дать вид:

(8') $$|\zeta| < 2\sqrt{2}\cdot 2^{1-\lambda}H\rho^{2-\lambda} = aH\rho^{2-\lambda},$$

откуда:

$$(9) \qquad |\cos r_0 N_0| = \frac{|\zeta|}{r_0} < \frac{aH\rho^{2-\lambda}}{r_0} < \frac{aH\rho^{2-\lambda}}{\rho} = aH\rho^{1-\lambda},$$

так как $\rho < r_0$, как проекция r_0.

Переходя после этих замечаний к оценке интегралов (6), поместим на плоскости $M_0 X^0 Y^0$ систему цилиндрических координат с полюсом в M_0 и, описав около точки M_0 в плоскости $M_0 X^0 Y^0$ круг радиуса $\frac{d}{2}$, выполним сначала интегрирование по этому кругу.

Для первых пяти интегралов получим интегралы меньше

$$H\int \frac{r_0^{1-\lambda}\,d\sigma}{r_0^2} < 2H\int_0^{\frac{d}{2}}\int_0^{2\pi} \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_0^{1+\lambda}} < 4\pi H\int_0^{\frac{d}{2}} \frac{\rho\,d\rho}{\rho^{1+\lambda}} = \frac{4\pi H}{1-\lambda}\left(\frac{d}{2}\right)^{1-\lambda},$$

так как

$$d\sigma = \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\cos NN_0} < 2\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Изучаемая часть последнего интеграла вследствие (9) абсолютно меньше

$$aH\int \frac{\rho^{1-\lambda}\,d\sigma}{r_0^2} < 2\,aH\int_0^{\frac{d}{2}}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^{2-\lambda}\,d\rho\,d\varphi}{r_0^2} < 4\pi\,aH\int_0^{\frac{d}{2}} \frac{\rho^{2-\lambda}\,d\rho}{\rho^2} = \frac{4\pi\,aH}{1-\lambda}\left(\frac{d}{2}\right)^{1-\lambda}.$$

Если точка M не лежит на границе (Ξ), а на поверхности полусферы, или если она лежит на границе, но проекция ее вне рассмотренного круга радиуса $\frac{d}{2}$, то

$$r_0 > \frac{d}{2}.$$

Значит, каждый интеграл, взятый по остальной части границы области (D), меньше

$$\frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}\int d\sigma < \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}\{4\pi d^2 + \pi d^2\} < 20\pi,$$

так как интеграл, взятый по оставшейся части границы, меньше πd^2, площади большого круга сферы (d), а интеграл по части сферы меньше $4\pi d^2$, ее поверхности.

Окружим точку M_0 в плоскости $M_0 X^0 Y^0$ какой-нибудь замкнутой кривой: для нас имеет интерес только окружность, центр которой в M_0 или не в ней — потому этот случай мы и будем подразумевать.

Построив цилиндрическую поверхность на этой кривой с образующими, параллельными нормали к границе в M_0, мы вырежем на границе замкнутую кривую.

Вынув из границы области (D) площадь, ограниченную этой кривой, и распространяя интегрирование по оставшейся поверхности, мы можем писать:

$$\int \frac{\cos Nx^0 \cos r_0 N_0}{r_0^2} d\sigma = \int \frac{\cos NN_0 \cos r_0 x^0}{r_0^2} d\sigma + \int \frac{\cos sy^0}{r_0} ds,$$

(9)

$$\int \frac{\cos Ny^0 \cos r_0 N_0}{r_0^2} d\sigma = \int \frac{\cos NN_0 \cos r_0 y^0}{r_0^2} d\sigma - \int \frac{\cos sx^0}{r_0} ds.$$

Например, для первого из равенств (9), имеем:

$$\int \frac{\cos Nx^0 \cos r_0 N_0}{r_0^2} d\sigma - \int \frac{\cos NN_0 \cos r_0 x^0}{r_0^2} d\sigma =$$

$$= + \int \left\{ \left(\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial \xi} \right) \right\} \cos NN_0 \, d\sigma = \int \frac{\partial \left(\frac{1}{r_0} \right)}{\partial \xi} d\sigma_0 ,$$

где знак (f) временно обозначает значение функции f на поверхности и где $d\sigma_0$ элемент площади круга в плоскости $M_0 X^0 Y^0$, по которому выполнено последнее интегрирование.

Заметив, наконец, что о сходимости интеграла

$$\int \frac{\cos Ny^0 \cos r_0 x^0}{r_0^2} d\sigma$$

можно сказать все, что было сказано об интеграле

$$\left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial x^0 \partial y^0} \right),$$

вследствие абсолютной сходимости этих интегралов и равенства

$$\int \frac{\cos Nx^0 \cos ry^0}{r^2} d\sigma = \int \frac{\cos Ny^0 \cos rx^0}{r^2} d\sigma,$$

можем писать:

$$(9') \qquad \int \frac{\cos Nx^0 \cos r_0 y^0}{r_0^2} d\sigma = \int \frac{\cos Ny^0 \cos r_0 x^0}{r_0^2} d\sigma.$$

5. Подставляя в правые части формул (5) вместо

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} P^0}{\partial x^{0\alpha}\, \partial y^{0\beta}\, \partial z^{0\gamma}}$$

числа (6), мы и получим числа, обозначенные нами знаками (4):

$$(10)\qquad \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} P}{\partial x^{\alpha}\, \partial y^{\beta}\, \partial z^{\gamma}}\right)_0 =$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x^0}a_1+\frac{\partial}{\partial y^0}a_2+\frac{\partial}{\partial z^0}a_3\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^0}b_1+\frac{\partial}{\partial y^0}b_2+\frac{\partial}{\partial z^0}b_3\right)^{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x^0}c_1+\frac{\partial}{\partial y^0}c_2+\frac{\partial}{\partial z^0}c_3\right)^{\gamma}P^0.$$

Чтобы по данному правилу составить числа (4) для другой точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, расположенной на границе, надо составить формулы для перехода к системе координат, в которой ось $M_1 Z$ нормаль N_1 в точке M_1, а другие две оси расположены в касательной плоскости к границе в M_1.

Найдя косинусы углов со старыми осями этой новой системы

	X'	Y'	Z'
X	a_1'	a_2'	a_3'
Y	b_1'	b_2'	b_3'
Z	c_1'	c_2'	c_3'

вычислить числа

$$\left(\frac{\partial^2 P'}{\partial x'^2}\right)=-\int\frac{\cos Nx'\cos r_1x'}{r_1^2}\,d\sigma,\quad \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial x'\,\partial y'}\right)=-\int\frac{\cos Nx'\cos r_1y'}{r_1^2}\,d\sigma,$$

$$(6')\quad \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial x'\,\partial z'}\right)=-\int\frac{\cos Nx'\cos r_1N_1}{r_1^2}\,d\sigma,\quad \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial y'^2}\right)=-\int\frac{\cos Ny'\cos r_1y'}{r_1^2}\,d\sigma,$$

$$\left(\frac{\partial^2 P'}{\partial y'\,\partial z'}\right)=-\int\frac{\cos Ny'\cos r_1N_1}{r_1^2}\,d\sigma,\quad \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial z'^2}\right)=-\int\frac{\cos NN_1\cos r_1N_1}{r_1^2}\,d\sigma$$

и применить формулы

$$(10')\qquad \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} P}{\partial x^{\alpha}\, \partial y^{\beta}\, \partial z^{\gamma}}\right)_1 =$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x'}a_1'+\frac{\partial}{\partial y'}a_2'+\frac{\partial}{\partial z'}a_3'\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x'}b_1'+\frac{\partial}{\partial y'}b_2'+\frac{\partial}{\partial z'}b_3'\right)^{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x'}c_1'+\frac{\partial}{\partial y'}c_2'+\frac{\partial}{\partial z'}c_3'\right)^{\gamma}P'.$$

В формулах (6′) r_1 расстояние от точки M_1 до переменной точки на границе области (D).

6. Если таблица

	X'	Y'	Z'
X^0	a_1^0	a_2^0	a_3^0
Y^0	b_1^0	b_2^0	b_3^0
Z^0	c_1^0	c_2^0	c_3^0

дает косинусы углов между осями с началом в M_0 и осями с началом в M_1, то в силу элементарных тожеств, дающих зависимости между коэффициентами формул преобразования координат, применение формул (10') можно заменить следующим:

Вычислить числа по формулам

$$\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} P^0}{\partial x^0\, \partial y^0\, \partial z^0}\right)_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x'} a_1^0 + \frac{\partial}{\partial y'} a_2^0 + \frac{\partial}{\partial z'} a_3^0\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x'} b_1^0 + \frac{\partial}{\partial y'} b_2^0 + \frac{\partial}{\partial z'} b_3^0\right)^\beta$$

(11) $$\left(\frac{\partial}{\partial x'} c_1^0 + \frac{\partial}{\partial y'} c_2^0 + \frac{\partial}{\partial z'} c_3^0\right)^\gamma P^1$$

и подставить их вместо

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} P^0}{\partial x^0\, \partial y^0\, \partial z^0}$$

в правые части формул (5).

Вследствие этого, доказывая непрерывное изменение чисел

$$\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} P}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma}\right)$$

с изменением положения точки на поверхности и исследуя характер этой непрерывности, можно ограничиться сравнением одноименных чисел

$$\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} P^0}{\partial x^{0\alpha}\, \partial y^{0\beta}\, \partial z^{0\gamma}}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} P^0}{\partial x^{0\alpha}\, \partial y^{0\beta}\, \partial z^{0\gamma}}\right)_1.$$

Приступая к этому сравнению, мы для упрощения письма будем откидывать значек (0) у букв, соответствующих координатной системе с началом в M_0, что соответствует предположению, что данная система координат совпадает с той, начало которой в M_0.

7. Вследствие произвольности выбора направлений осей $M_0 X$ и $M_0 Y$ можно ограничиться сравнением чисел

(12) $$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right), \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial z}\right), \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)$$

с числами

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial y}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial z}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)_1. \tag{12'}$$

Обозначая буквой δ расстояние между точками M_0 и M_1, мы докажем, что разности между соответственными числами все абсолютно меньше числа

$$a\delta^{1-\lambda}, \tag{13}$$

где a некоторое постоянное.

8. Опишем около точки M_0 в плоскости $M_0 X\, Y$ окружность радиуса 2δ и построив цилиндр на этой окружности с образующими, параллельными нормали N_0, вырежем этим цилиндром из границы некоторую площадку.

Возьмем все встречающиеся интегралы по этой площадке и докажем, что все они по абсолютной величине меньше числа (13).

Все необходимое для интегралов (12) выполнено в параграфе 4-м; надо только рассмотренную там окружность радиуса $\frac{d}{2}$ заменить окружностью радиуса 2δ, и можно сразу написать, что значение первых трех интегралов (12) абсолютно меньше

$$\frac{4\pi H}{1-\lambda}(2\delta)^{1-\lambda},$$

а значение последнего абсолютно меньше

$$\frac{4\pi a H}{1-\lambda}(2\delta)^{1-\lambda}.$$

9. Переходим к интегралам (6'), к которым мы присоединим еще интеграл

$$-\int \frac{\cos Ny' \cos r_1 x'}{r_1^{\,2}}\, d\sigma. \tag{6''}$$

В первых 5 из них и в (6'') первый множитель под знаком интеграла,

$$\cos Nx' \text{ или } \cos Ny',$$

абсолютно меньше

$$H r_1^{\,1-\lambda}.$$

Если δ_0 расстояние проекции N_1 точки M_1 на плоскость M_0XY от точки M_0, то $\delta_0 < \delta$, и окружность радиуса 3δ, описанная около N_1, охватывает окружность радиуса 2δ, описанную около M_0.

Если ρ_1 проекция r_1 на плоскость M_0XY, то $\rho_1 < r_1$.

Значит, каждый из рассматриваемых интегралов абсолютно меньше:

$$2H\int\limits_0^{3\delta}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r_1^{1-\lambda}\rho_1 d\rho_1 d\varphi}{r_1^2} = 2H\int\limits_0^{3\delta}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho_1 d\rho_1 d\varphi}{r_1^{1+\lambda}} < 4\pi H\int\limits_0^{3\delta}\frac{\rho_1 d\rho_1}{\rho_1^{1+\lambda}} = \frac{4\pi H}{1-\lambda}(3\delta)^{1-\lambda}.$$

Остается последний из интегралов (6′):

$$\int\frac{\cos NN_1 \cos r_1 N_1}{r_1^2}\,d\sigma.$$

Применяя неравенство (9) параграфа 4-го имеем:

$$|\cos r_1 N_1| < aH\rho_2^{1-\lambda},$$

где ρ_2 проекция r_1 на плоскость, касательную к границе в точке M_1.

Так как

$$\rho_2 < r_1,$$

из последнего неравенства заключаем, что

$$|\cos r_1 N_1| < aHr_1^{1-\lambda}$$

и что последний интеграл абсолютно меньше

$$2aH\int\limits_0^{3\delta}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r_1^{1-\lambda}\rho_1 d\rho_1 d\varphi}{r_1^2} < 4a\pi H\int\limits_0^{3\delta}\frac{\rho_1 d\rho_1}{\rho_1^{1+\lambda}} < 4a\pi H\int\limits_0^{3\delta}\frac{d\rho_1}{\rho_1^{\lambda}} = \frac{4a\pi H}{1-\lambda}(3\delta)^{1-\lambda}.$$

10. Приступаем теперь к изучению разностей между числами (12) и (12′), считая, что все входящие интегралы взяты по части границы области (D), оставшейся после удаления из нее изученной уже площадки.

Замечаем прежде всего, что замена в выражениях

$$a_1 a_2 \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial x' \partial y'}\right) + a_1 a_3 \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial x' \partial z'}\right) + a_2 a_3 \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial y' \partial z'}\right),$$

$$a_2 b_1 \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial x' \partial y'}\right) + a_3 b_1 \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial x' \partial z'}\right) + a_3 b_2 \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial y' \partial z'}\right),$$

$$a_2 c_1 \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial x' \partial y'}\right) + a_3 c_1 \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial x' \partial z'}\right) + a_3 c_2 \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial y' \partial z'}\right),$$

$$c_1 c_2 \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial x' \partial y'}\right) + c_1 c_3 \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial x' \partial z'}\right) + c_2 c_3 \left(\frac{\partial^2 P'}{\partial y' \partial z'}\right),$$

входящих в состав тех формул (11), которые дают интегралы (12′), интеграла

$$\int \frac{\cos Nx' \cos r_1 y'}{r_1^2} d\sigma$$

через

$$\int \frac{\cos Ny' \cos r_1 x'}{r_1^2} d\sigma + \int\limits_{(2\delta)} \frac{\cos Ny' \cos r_1 x'}{r_1^2} d\sigma - \int\limits_{(2\delta)} \frac{\cos Nx' \cos r_1 y'}{r_1^2} d\sigma,$$

где добавочные слагаемые оба вида (13), а интегралов

$$\int \frac{\cos Nx' \cos r_1 N_1}{r_1^2} d\sigma, \quad \int \frac{\cos Ny' \cos r_1 N_1}{r_1^2} d\sigma$$

через

$$\int \frac{\cos NN_1 \cos r_1 x'}{r_1^2} d\sigma + \int \frac{\cos sy'}{r_1} ds, \quad \int \frac{\cos NN_1 \cos r_1 y'}{r_1^2} d\sigma - \int \frac{\cos sx'}{r_1} ds$$

имеет, между прочим, следствием прибавление слагаемых

(14)
$$\begin{gathered}
a_3 \left\{+ a_1 \int \frac{\cos sy'}{r_1} ds - a_2 \int \frac{\cos sx'}{r_1} ds\right\}, \\
a_3 \left\{+ b_1 \int \frac{\cos sy'}{r_1} ds - b_2 \int \frac{\cos sx'}{r_1} ds\right\}, \\
a_3 \left\{+ c_1 \int \frac{\cos sy'}{r_1} ds - c_2 \int \frac{\cos sx'}{r_1} ds\right\}, \\
c_3 \left\{+ c_1 \int \frac{\cos sy'}{r_1} ds - c_2 \int \frac{\cos sx'}{r_1} ds\right\},
\end{gathered}$$

в которых

$$|a_3| = |\cos N_1 x| < H\delta^{1-\lambda}, \text{ так как } \cos N_0 x = 0,$$

$$|c_1| = |\cos N_0 x'| < H\delta^{1-\lambda}, \text{ так как } \cos N_1 x' = 0,$$

$$|c_2| = |\cos N_0 y'| < H\delta^{1-\lambda}, \text{ так как } \cos N_1 y' = 0.$$

Интегралы

$$\int \frac{\cos sy'}{r_1} ds \quad \text{и} \quad \int \frac{\cos sx'}{r_1} ds$$

ограничены.

Распространяя интегрирование по окружности в плоскости $M_0\,X\,Y$, дадим им вид:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho \cos\varphi\, d\varphi}{r_1}, \quad \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho \sin\varphi\, d\varphi}{r_1}, \quad \rho = 2\delta,$$

и в них

$$\frac{\rho}{r_1} < 2.$$

Действительно, если δ_0 проекция δ на плоскость $M_0\,X\,Y$:

$$\rho_1 < r_1, \quad \delta_0 < \delta.$$

Так как (черт. 8)

$$\rho_1 \geqq 2\delta - \delta_0, \text{ то } \rho_1 \geqq \delta$$

и значит

$$\frac{\rho}{r_1} < \frac{\rho}{\rho_1} < \frac{2\delta}{\delta} = 2.$$

Вследствие этого, группы слагаемых (14) все вида (13).

Но

$$\cos Nx = a_1 \cos Nx' + a_2 \cos Ny' + a_3 \cos NN_1,$$
$$\cos r_1 x = a_1 \cos r_1 x' + a_2 \cos r_1 y' + a_3 \cos r_1 N_1$$
$$\cos Ny = b_1 \cos Nx' + b_2 \cos Ny' + b_3 \cos NN_1,$$
$$\cos r_1 y = b_1 \cos r_1 x' + b_2 \cos r_1 y' + b_3 \cos r_1 N_1$$
$$\cos Nz = c_1 \cos Nx' + c_2 \cos Ny' + c_3 \cos NN_1,$$
$$\cos r_1 z = c_1 \cos r_1 x' + c_2 \cos r_1 y' + c_3 \cos r_1 N_1.$$

Вследствие этих соотношений, суммы оставшихся слагаемых в выражениях (11) обращаются соответственно в

$$(15) \quad \int \frac{\cos Nx \cos r_1 x}{r_1^2} d\sigma, \quad \int \frac{\cos Nx \cos r_1 y}{r_1^2} d\sigma, \quad \int \frac{\cos Nx \cos r_1 N_0}{r_1^2} d\sigma,$$
$$\int \frac{\cos NN_0 \cos r_1 N_0}{r_1^2} d\sigma,$$

где интегрирование, конечно, распространено по границе области (D) без площадки, вырезанной цилиндром, построенным на окружности (2δ), и нам предстоит изучать разности

$$(16)\quad \begin{gathered}\int \cos Nx \left\{\frac{\cos r_0 x}{r_0^2} - \frac{\cos r_1 x}{r_1^2}\right\} d\sigma, \int \cos Nx \left\{\frac{\cos r_0 y}{r_0^2} - \frac{\cos r_1 y}{r_1^2}\right\} d\sigma \\ \int \cos Nx \left\{\frac{\cos r_0 N_0}{r_0^2} - \frac{\cos r_1 N_0}{r_1^2}\right\} d\sigma, \int \cos NN_0 \left\{\frac{\cos r_0 N_0}{r_0^2} - \frac{\cos r_1 N_0}{r_1^2}\right\} d\sigma,\end{gathered}$$

в которых интегралы взяты по только-что указанной области, так как искомые разности отличаются от (16) на члены вида (13).

Опишем около точки M_0 в плоскости M_0XY окружность радиуса $\frac{d}{2}$, построим на этой окружности цилиндр, с образующими, параллельными нормали в M_0, и возьмем интегралы (16) сначала по кольцевидной области, вырезанной этим цилиндром.

11. Так как r_1, r_0 и δ образуют треугольник, то

$$r_0 - \delta < r_1 < r_0 + \delta.$$

С другой стороны, для точек рассматриваемой кольцеобразной области

$$r_0 > 2\delta$$

и, значит,

$$(17)\qquad \frac{r_1}{r_0} < \frac{r_0+\delta}{r_0} < \frac{3}{2}, \quad \frac{r_1}{r_0} > \frac{r_0-\delta}{r_0} > \frac{1}{2}; \quad \frac{r_0}{r_1} < 2.$$

12. Изучаем сначала первые три разности (16). Пишем

$$\int \cos Nx \left\{\frac{\cos r_0 x}{r_0^2} - \frac{\cos r_1 x}{r_1^2}\right\} ds =$$

$$= \int \cos Nx \frac{\cos r_0 x - \cos r_1 x}{r_0^2} d\sigma + \int \cos Nx \cos r_1 x \left\{\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2}\right\} d\sigma$$

и таким же образом преобразуем две остальные.

Рассматриваем первые интегралы.

В них

$$|\cos Nx| < H r_0^{1-\lambda}$$

$$|\cos r_0 x - \cos r_1 x| = \left|\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{M_0} - \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{M_1}\right| < \frac{2\sqrt{3}\,\delta}{r'} < \frac{4\sqrt{3}\cdot\delta}{r_0}$$

где r' расстояние от $M(\xi, \eta, \zeta)$ до некоторой точки M' между M_0 и M_1; так как вторые производные от r меньше по абсолютной величине чем $\frac{2}{r}$ и вследствие того, что расстояние от M' до M_0 меньше δ:

$$\frac{r'}{r_0} > \frac{r_0 - \delta}{r_0} > \frac{1}{2}, \quad \frac{r_0}{r'} < 2.$$

Такие же неравенства справедливы и для двух остальных разностей

$$\cos r_0 y - \cos r_1 y, \quad \cos r_0 N_0 - \cos r_1 N_0$$

и вывод отличается только тем, что одно дифференцирование по x заменяется дифференцированием по y и по z.

Следовательно, каждый из рассматриваемых интегралов абсолютно меньше

$$4\sqrt{3}\,\delta H \int \frac{r_0^{1-\lambda}\,d\sigma}{r_0^3} < 8\sqrt{3}\,\delta H \int_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{r_0^{2+\lambda}} < 8\sqrt{3} \cdot 2\pi \cdot \delta H \int_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \frac{\rho\, d\rho}{\rho^{2+\lambda}} =$$

$$= \frac{16\sqrt{3}\,\pi H}{\lambda}\,\delta \left\{ \frac{1}{(2\delta)^{\lambda}} - \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^{\lambda}} \right\}.$$

Из написанного неравенства ясно, что интегралы вида (13).

В оставшихся трех интегралах, вследствие (17):

$$\left| \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2} \right| = \left| \frac{(r_1 - r_0)(r_1 + r_0)}{r_0^2 r_1^2} \right| < \frac{6\delta}{r_0^3}. \tag{18}$$

Вследствие этого каждый из них меньше

$$6\,\delta H \int \frac{r_0^{1-\lambda}\,d\sigma}{r_0^3}$$

и опять вида (13).

13. Остается изучить разность

$$\int \frac{\cos NN_0 \cos r_0 N_0}{r_0^2}\,d\sigma - \int \frac{\cos NN_0 \cos r_1 N_0}{r_1^2}\,d\sigma =$$

$$= \int \cos NN_0 \cos r_0 N_0 \left\{ \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2} \right\} d\sigma + \int \frac{\cos NN_0 \{\cos r_0 N_0 - \cos r_1 N_0\}}{r_1^2}\,d\sigma.$$

Мы имеем по (9) и (18):

$$\cos r_0 N_0 = \frac{\zeta}{r_0} \quad \text{и} \quad |\cos r_0 N_0| < aH\rho^{1-\lambda}, \quad \left|\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2}\right| < \frac{10\delta}{r_0^3}.$$

Следовательно, первый интеграл абсолютно меньше

$$2 \cdot 10 \cdot aH\delta \int_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^{1-\lambda}\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_0^3} < 20aH\delta \cdot 2\pi \int_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \frac{\rho^{2-\lambda}}{\rho^3}\,d\rho =$$

$$= a_1 H\delta \int_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \frac{d\rho}{\rho^{1+\lambda}} = \frac{a_1 H\delta}{\lambda}\left\{\frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^\lambda}\right\},$$

т. е. вида (13).

Приступая ко второму, оценим разность

$$\cos r_0 N_0 - \cos r_1 N_0.$$

Имеем

$$\cos r_0 N_0 - \cos r_1 N_0 = \frac{\zeta}{r_0} - \frac{\zeta - z_1}{r_1} = \frac{\zeta r_1 - (\zeta - z_1) r_0}{r_0 r_1} = \frac{\zeta}{r_0} \cdot \frac{r_1 - r_0}{r_1} + \frac{z_1}{r_1}.$$

Так как

$$\frac{r_1 - r_0}{r_1} < 2\frac{\delta}{r_0},$$

то по формуле (9):

$$\left|\frac{\zeta}{r_0} \cdot \frac{r_1 - r_0}{r_1}\right| < \frac{2aH\delta \cdot \rho^{1-\lambda}}{r_0} < \frac{2aH\delta}{\rho^\lambda}.$$

Обозначая через δ_0 проекцию δ на основную плоскость и применяя к точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ формулу (8′), имеем, так как $\delta_0 < \delta$:

$$\left|\frac{z_1}{r_1}\right| < \frac{2aH\delta_0^{2-\lambda}}{r_0} < \frac{2aH\delta^{2-\lambda}}{\rho}.$$

При всем этом, на основании (17),

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{r_0^2}{r_1^2} \cdot \frac{1}{r_0^2} < \frac{4}{r_0^2} < \frac{4}{\rho^2}.$$

Вследствие всего этого, второй интеграл абсолютно меньше

$$2 \cdot 4 \cdot 2aH\delta \cdot \int\limits_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\rho^2 \cdot \rho^\lambda} + 2 \cdot 4 \cdot 2aH\delta^{2-\lambda} \int\limits_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\rho \cdot \rho^2} =$$

$$= \frac{16a \cdot 2\pi H\delta}{\lambda} \left\{ \frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^\lambda} \right\} + 16a\, 2\pi\, H\delta^{2-\lambda} \left\{ \frac{1}{2\delta} - \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)} \right\},$$

т. е. вида (13).

Отметим, что изученные разности, в случае, когда мы положим

$$d = k\delta,$$

где k некоторое число, и заставим δ стремиться к нулю, стремятся к нулю вместе с δ как число вида (13), т. е. останутся ограниченными.

14. Для оценки разностей (16), взятых по оставшейся части области (D), замечаем, что во всех интегралах второй множитель, как разность между значениями одноименных производных от $\frac{1}{r}$ в точках M_0 и M_1 меньше

$$\frac{4\delta}{r'^3},$$

где r' есть расстояние от точки на области интегрирования до некоторой точки M' на отрезке $M_0 M_1$. Если δ' расстояние от M' до M_0, то

$$\delta' < \delta, \quad r_0 > \frac{d}{2}$$

и

$$r' > r_0 - \delta' > \frac{d}{2} - \delta \cdot$$

Вследствие этого, интегралы по оставшейся области абсолютно меньше

$$\frac{4\delta}{\left(\frac{d}{2} - \delta\right)^3} \int d\sigma < \frac{4\delta \cdot 5\pi d^2}{\left(\frac{d}{2} - \delta\right)^3}$$

и, значит, при данном d, вида

$$a\delta.$$

Заметим, что в случае, если мы положим $d = k\delta$ и станем приближать к нулю вместе с δ, интегралы останутся ограниченными, именно, меньше числа

$$\frac{20\pi k^2}{\left(\frac{k}{2} - 1\right)^3},$$

считая, конечно, $k > 2$.

15. Положим теперь, что точка M_1 находится на нормали к границе в точке M_0, и изучим разности между интегралами (12) и значениями интегралов

$$(19)\quad \left|\begin{array}{ll} -\int \frac{\cos Nx \cos rx}{r^2}\,d\sigma, & -\int \frac{\cos Nx \cos ry}{r^2}\,d\sigma, \\ -\int \frac{\cos Nx \cos rN_0}{r^2}\,d\sigma, & -\int \frac{\cos NN_0 \cos rN_0}{r^2}\,d\sigma \end{array}\right.$$

в точке M_1.

Обозначая попрежнему через δ расстояние от M_1 до M_0, оценим значения первых трех интегралов (19), взятых по части границы, вырезанной цилиндром, построенным на круге радиуса 2δ около точки M_0 в плоскости M_0XY (черт. 9).

Теперь ρ есть проекция как r_0, так и r, вследствие чего

$$\rho < r.$$

Повторяя рассуждения параграфа 4-го, видим, если φ_0 угол между r_0 и его проекцией ρ:

$$\varphi_0 < \frac{\pi}{2} - \omega, \quad \cos\varphi_0 > \sin\omega > \frac{1}{2}, \quad r_0 = \frac{\rho}{\cos\varphi_0} < 2\rho.$$

Значит, интегралы по абсолютной величине меньше

$$2H\int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi}{r^2} < 2\cdot 2^{1-\lambda}\cdot 2\pi H\int_0^{2\delta}\frac{\rho^{2-\lambda}}{\rho^2}\,d\rho = \frac{4\cdot 2^{1-\lambda}\,\pi H}{1-\lambda}(2\delta)^{1-\lambda},$$

т. е. интегралы вида (13).

16. Составляем теперь разности между интегралами (12) и (19) и берем сначала интегралы по кольцеобразной области, описанной в конце параграфа 10-го.

Разность между первыми двумя интегралами имеет вид

$$\int \cos Nx\cdot\mu\left\{\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3}\right\}d\sigma,$$

где

$$\text{или } \mu = \xi = \rho\cos\varphi, \text{ или } \mu = \eta = \rho\sin\varphi, \quad |\mu| < \rho.$$

Замечаем, что неравенства (17) остаются справедливыми с заменою r_1 на r; следовательно,

$$\left|\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3}\right| = \left|\frac{(r-r_0)(r^2+rr_0+r_0^2)}{r_0^3 r^3}\right| < \frac{\delta}{r_0^4}\,\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{a'\delta}{r_0^4}.$$

Следовательно, разности между первыми двумя интегралами абсолютно меньше

$$2a' H\delta \int_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \int_{0}^{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda} \rho^2 \, d\rho \, d\varphi}{r_0^4} = 2a' \cdot 2\pi H\delta \int_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \frac{\rho^2 \, d\rho}{\rho^{3+\lambda}} < 4a'\pi H\delta \int_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \frac{d\rho}{\rho^{1+\lambda}} =$$

$$= \frac{4a'\pi H\delta}{\lambda} \left\{ \frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^\lambda} \right\}.$$

Оценивая разность между третьими интегралами

$$-\int \cos Nx \cdot \zeta \left\{ \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right\} d\sigma,$$

полагаем для упрощения $|\cos Nx| < 1$ и видим, применяя формулу (8′), что она абсолютно меньше

$$2aa' H\delta \int_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \int_{0}^{2\pi} \frac{\rho^{2-\lambda} \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi}{r_0^4} < 4\pi aa' H\delta \int_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \frac{\rho^{3-\lambda} \, d\rho}{\rho^4} = \frac{4\pi aa' H\delta}{\lambda} \left\{ \frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^\lambda} \right\}.$$

Итак, оцененные до сих пор части изучаемых разностей все вида (13).

17. Остается рассмотреть разность

$$P_0 = -\int \cos NN_0 \left\{ \frac{\cos r_0 N_0}{r_0^2} - \frac{\cos rN_0}{r^2} \right\} d\sigma.$$

Представляем P_0 в виде суммы трех интегралов

$$P_0 = P_1 + P_2 + P_3,^*$$

где

$$P_1 = -\int \frac{\cos r_0 N}{r_0^2} \, d\sigma + \int \frac{\cos rN}{r^2} \, d\sigma,$$

$$P_2 = \int (1 - \cos NN_0) \left\{ \frac{\cos r_0 N}{r_0^2} - \frac{\cos rN}{r^2} \right\} d\sigma,$$

$$P_3 = \int \cos NN_0 \left\{ \frac{\cos r_0 N - \cos r_0 N_0}{r_0^2} - \frac{\cos rN - \cos rN_0}{r^2} \right\} d\sigma,$$

$\int \frac{\cos r_0 N}{r_0^2} \, d\sigma = \varepsilon \cdot 2\pi$, где $\varepsilon = +1$, если внутри (D) первая область,

$\varepsilon = -1$, если внутри (D) вторая область,

$\int \frac{\cos rN}{r^2} \, d\sigma = 0$, если M_1 вне области (D) (черт. 10),

$= \varepsilon \, 4\pi$, если M_1 внутри области (D).

---

* Cp. Hadamard. Leçons sur la théories de ondes, pp. 19—20.

Следовательно, если точка M_1 в первой области, то

$$\text{или } P_1 = 2\pi + 0 = 2\pi, \text{ или } P_1 = -2\pi + 4\pi = 2\pi;$$

если точка M_1 во второй области, то

$$\text{или } P_1 = -2\pi + 0 = -2\pi, \text{ или } P_1 = 2\pi - 4\pi = -2\pi.$$

Итак,

$$P_1 = \varepsilon \cdot 2\pi, \text{ где } \varepsilon = 1, \text{ если точка } M_1 \text{ в первой области,}$$
$$\varepsilon = -1, \text{ если точка } M_1 \text{ во второй области.}$$

Займемся P_2. Берем каждое слагаемое по области, вырезанной цилиндром, построенным на круге радиуса 2δ около M_0 в плоскости $M_0 X Y$.

Полагаем для упрощения,

$$(20)\ |1-\cos NN_0| < 2\left|\sin\frac{NN_0}{2}\right|\left|\sin\frac{NN_0}{2}\right| < 2\left|\sin\frac{NN_0}{2}\right| < (NN_0) < Hr_0^{1-\lambda}.$$

Имеем, как выяснено в параграфе 4-м, $r_0 < 2\rho$.

Так как r_0 пересекает границу, то угол α между r_0 и δ больше ω (черт. 11) и

$$r = \frac{\delta\sin\alpha}{\sin\beta} > \delta\sin\alpha > \delta\sin\omega > \frac{1}{2}\delta; \quad \beta = (r_1 r_0).$$

Значит:

$$\left|\int\frac{(1-\cos NN_0)\cos r_0 N\,d\sigma}{r_0^2}\right| < 2\cdot H\int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_0^2} =$$

$$= 4\pi H\int_0^{2\delta}\frac{\rho\,d\rho}{\rho^{1+\lambda}} < 4\pi H\int_0^{2\delta}\frac{d\rho}{\rho^\lambda} = \frac{4\pi H}{1-\lambda}(2\delta)^{1-\lambda},$$

$$\left|\int\frac{(1-\cos NN_0)\cos rN}{r^2}d\sigma\right| \leqslant 2H\int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\rho\,d\rho\,d\varphi}{\left(\frac{1}{2}\delta\right)^2} =$$

$$= \frac{4\cdot 2H}{\delta^2}\int_0^{2\delta}\int_0^{2\varphi} r_0^{1-\lambda}\,\rho\,d\rho\,d\varphi < \frac{16\pi\cdot 2^{1-\lambda}H}{\delta^2}\int_0^{2\delta}\rho^{2-\lambda}\,d\rho =$$

$$= \frac{aH}{\delta^2(3-\lambda)}\cdot(2\delta)^{3-\lambda} = \frac{aH\cdot 2^{3-\lambda}}{3-\lambda}\cdot\delta^{1-\lambda}.$$

Беря P_2 по кольцеобразной области, введенной в конце параграфа 10-го, пишем

$$|\cos r_0 N - \cos r N| < 2 \left|\sin \frac{r r_0}{2}\right| < (r r_0) < \frac{\pi}{2} \sin (r r_0) < a \frac{\delta}{r_0},$$

так как

$$\sin \beta = \sin (r r_0) = \frac{\delta}{r_0} \sin \gamma < \frac{\delta}{r_0}.$$

Имеем:

$$\frac{\cos r_0 N}{r_0^2} - \frac{\cos r N}{r^2} = \cos r_0 N \left\{\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right\} + \frac{1}{r^2}\{\cos r_0 N - \cos r N\}.$$

Так как вместе с (17) в силе и формула (18):

$$\left|\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right| < \frac{10\delta}{r_0^3},$$

имеем, снова пользуясь упрощенным неравенством (20):

$$\left|\int (1 - \cos NN_0) \frac{1}{r^2}\{\cos r_0 N - \cos r N\} d\sigma\right| < 2 Ha\delta \int_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda} \rho \, d\rho \, d\varphi}{r^2 r_0} <$$

$$< 2 Ha \cdot 4\delta \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\rho \, d\rho \, d\varphi}{r_0^2 r_0^\lambda} < 16 a\pi H\delta \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{d\rho}{\rho^{1+\lambda}} = \frac{16 \pi a H\delta}{\lambda} \left\{\frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^\lambda}\right\},$$

$$\left|\int (1 - \cos NN_0) \cos r_0 N \left\{\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right\} d\sigma\right| < 2 \cdot 10 H\delta \int_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda} \rho \, d\rho \, d\varphi}{r_0^3} <$$

$$< 4\pi \cdot 10 \cdot H\delta \int_{2\delta}^{\frac{d}{2}} \frac{\rho \, d\rho}{\rho^{2+\lambda}} = \frac{4\pi \, 10 \, H\delta}{\lambda} \left\{\frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^\lambda}\right\}.$$

Берем интеграл P_3 сначала по области, вырезанной цилиндром на круге радиуса 2δ:

$$|\cos r_0 N - \cos r_0 N_0| < 2 \left|\sin \frac{NN_0}{2}\right| < H r_0^{1-\lambda},$$

$$|\cos r N - \cos r N_0| < 2 \left|\sin \frac{NN_0}{2}\right| < H r_0^{1-\lambda},$$

$$\left|\int \cos NN_0 \frac{\cos r_0 N - \cos r_0 N_0}{r_0^2} d\sigma\right| < 2H \int_0^{2\delta} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda} \rho \, d\rho \, d\varphi}{r_0^2} <$$

$$< 4\pi H \int_0^{2\delta} \frac{d\rho}{\rho^\lambda} = \frac{4\pi H}{1 - \lambda} (2\delta)^{1-\lambda},$$

$$\left|\int \cos NN_0 \, \frac{\cos rN - \cos rN_0}{r^2}\, d\sigma\right| < 2H \int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda}\,\rho\, d\rho\, d\varphi}{r^2} <$$

$$< 2H\cdot 4\cdot \int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda}\,\rho\, d\rho\, d\varphi}{\delta^2} < \frac{8\cdot 2^{1-\lambda}\cdot 2\pi H}{\delta^2}\int_0^{2\delta} \rho^{1-\lambda}\,\rho\, d\rho =$$

$$= \frac{16\cdot 2^{1-\lambda}\,\pi H}{(3-\lambda)\,\delta^2}(2\delta)^{3-\lambda} = aH\delta^{1-\lambda}.$$

Остается интеграл по кольцеобразной области параграфа 10-го. Замечаем, что

$$\frac{\cos r_0 N - \cos r_0 N_0}{r_0^{\,2}} - \frac{\cos rN - \cos rN_0}{r^2} =$$

(21) $$= \frac{(r_0 \cos r_0 N - r\cos rN) - (r_0\cos r_0 N_0 - r\cos rN_0)}{r^3} +$$

$$+ r_0(\cos r_0 N - \cos r_0 N_0)\left\{\frac{1}{r_0^{\,3}} - \frac{1}{r^3}\right\}.$$

Проектируя отрезки r_0 и r на нормали N и N_0, получаем:

$$r_0 \cos r_0 N - r\cos rN = \delta\cos(NN_0), \quad r_0\cos r_0 N_0 - r\cos rN_0 = \delta,$$

$$|\delta\cos NN_0 - \delta| < 2\delta\left|\sin\frac{NN_0}{2}\right| < H\delta r_0^{\,1-\lambda}.$$

Пользуясь тожеством (21), разбиваем интеграл P_3 на два. Первый по абсолютной величине меньше

$$2H\delta\int_{2\delta}^{\frac{d}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{r^3} < 8\cdot 2H\delta\int_{2\delta}^{\frac{d}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_0^{\,3}} < 32\pi H\delta\int_{2\delta}^{\frac{d}{2}}\frac{\rho\,d\rho}{\rho^{2+\lambda}} =$$

$$= \frac{32\pi H\delta}{\lambda}\left\{\frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^\lambda}\right\}.$$

Второй, так как

$$|\cos r_0 N - \cos r_0 N_0| < 2\left|\sin\frac{N_0 N}{2}\right| < Hr_0^{\,1-\lambda}, \quad \left|\frac{1}{r_0^{\,3}} - \frac{1}{r^3}\right| < \frac{a'\delta}{r_0^{\,4}},$$

абсолютно меньше

$$2a'H\delta\int_{2\delta}^{\frac{d}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{r_0\, r_0^{1-\lambda}\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_0^{\,4}} < 4\pi a'H\delta\int_{2\delta}^{\frac{d}{2}}\frac{\rho\,d\rho}{\rho^{2+\lambda}} < \frac{aH\delta}{\lambda}\left\{\frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^\lambda}\right\}.$$

Заметим, что все сказанное о рассмотренных разностях остается в силе и тогда, когда $d = k\delta$ и стремится к нулю вместе с δ. Разности стремятся к нулю и остаются ограниченными.

18. Все сказанное в параграфе 14-м применимо к разностям между интегралами (12) и (19), взятыми по остальной части области (D).

Итак, разности между производными от P в точке на нормали в M_0 и числами (12) для первых пяти производных вида $a\delta^{1-\lambda}$, а для последней — вида

$$\varepsilon \cdot 2\pi + a\delta^{1-\lambda}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

где δ расстояние точки M_1 от M_0.

Из сказанного ясно, что эти разности остаются ограниченными и в том случае, когда число d, будучи вида $k\delta$, стремится к нулю вместе с δ.

19. Положим теперь, что точка M_1 не на нормали и не на границе (черт. 12).

Положим, что расстояние δ точки M_1 от M_0 менее $\frac{d_0}{4}$.

Если мы около точки M_1 опишем сферу радиуса δ, то на поверхности сферы будет точка M_0 и, так как M_1 не на нормали в M_0, внутри сферы будут точки поверхности, среди которых будет ближайшая.

Если это точка M_2, то M_1 на нормали к поверхности в M_2.

Если $M_1 M_2 = \delta_1$, $M_2 M_0 = \delta_2$, то

$$\delta_1 < \delta, \quad \delta_2 < \delta_1 + \delta < 2\delta,$$

откуда, между прочим, ясно, что $\delta_2 < \frac{d}{2}$.

Если изучаемая производная P'' не $= \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$, то

$$(P''_{M_0}) - P''_{M_1} = \left((P''_{M_0}) - (P''_{M_2})\right) + \left((P''_{M_2}) - P''_{M_1}\right)$$

и

$$|(P''_{M_0}) - P''_{M_1}| \leqq a'\delta_2^{1-\lambda} + a''\delta_1^{1-\lambda} < a\delta^{1-\lambda}.$$

Если

$$P'' = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2},$$

то

$$\left((P''_{M_0}) - \varepsilon \cdot 2\pi\right) - P''_{M_1} = \left((P''_{M_0}) - (P''_{M_2})\right) + \left((P''_{M_2}) - \varepsilon \cdot 2\pi\right) - P''_{M_1}\right)$$

и

$$|(P''_{M_0}) - \varepsilon \cdot 2\pi - P''_{M_1}| < a'\delta_2^{1-\lambda} + a''\delta_1^{1-\lambda} < a\delta^{1-\lambda},$$

где $\varepsilon = +1$, если точка M_1 в первой области, и $\varepsilon = -1$, если M_1 во второй области.

20. Из сказанного ясно, что все вторые производные от интеграла P стремятся к определенным пределам, когда точка M_1 приближается какимнибудь образом к точке M_0 на границе, причем разность между производной и ее пределом вида

$$a\delta^{1-\lambda},$$

где δ расстояние точки M_1 от M_0; мы считаем здесь, однако, что δ уже меньше $\frac{d}{4}$ при постоянном d.

Примечание. Если точка M_0 лежит в центре сферы, ограничивающей область (D), т. е. совпадает с M^0, то при построении кольцеобразной области параграфа 10-го можно вместо круга радиуса $\frac{d}{2}$ описывать круг радиуса d и, значит, ограничивать значения δ условием быть меньше $\frac{d}{2}$, а не $\frac{d}{4}$.

Сами пределы вычисляются по формуле (5) заменой в ней производных

$$\frac{\partial^2 P^0}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 P^0}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 P^0}{\partial x\, \partial z},\quad \frac{\partial^2 P^0}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 P^0}{\partial y\, \partial z}$$

числами

$$\left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial x^2}\right),\quad \left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial x\, \partial y}\right),\quad \left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial x\, \partial z}\right),\quad \left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial y^2}\right),\quad \left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial y\, \partial z}\right),$$

вычисленными в точке M_0, а производной $\frac{\partial^2 P^0}{\partial z^2}$ числом

(22) $$-\varepsilon \cdot 2\pi + \left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial z^2}\right),$$

где $\varepsilon = +1$, если точка M_1 в первой области, и $\varepsilon = -1$, если точка M_1 во второй.

Сказанное предполагает, что все положения движущейся точки M_1, начиная с некоторого, по одну сторону от границы; иначе знак в числе (22) не будет определен.

Последнее всегда соблюдено, если точка M_1 перемещается по прямой, отличной от касательной в M_0, так как, как бы близок к прямому ни был угол α между направлением движения M_1 и нормалью в M_0, по сказанному в параграфе 2-м главы 1-й можно указать настолько малый радиус d' сферы условия (γ) А. М. Ляпунова, что соответствующий ей угол ω конуса теоремы параграфа 1-го будет больше α (черт. 13).

Так как все положения точки M_1, начиная с некоторого, будут внутри сферы радиуса d', то они будут по одну сторону границы, будучи внутри указанного конуса.

Отсутствие определенного предела может обнаружиться только тогда, когда точка M_1 движется по касательной и точка M_0 есть точка сгущения точек пересечения касательной в M_0 к границе с границей.

21. Приведем всякой точке на границе число $(P'')_1$ или $(P'')_2$, к которому стремится P'', приближаясь к этой точке из области первой или второй.

Условимся считать, что, когда точка, перемещаясь по области первой (или второй), попадает на границу, производная P'' принимает значение $(P'')_1$ (или $(P'')_2$).

Тогда, где бы ни находилась точка M_1 в области первой или на ее границе (в области второй или на ее границе)

$$|P'' - \text{прд}\, P''| < a\delta^{1-\lambda}, \quad M_1 \to M_0,$$

где δ расстояние между M_1 и M_0.

22. Возвращаясь к отдельным замечаниям, сделанным в разных местах, мы можем утверждать, что интегралы (3) остаются ограниченными и в том случае, когда d, будучи вида $k\delta$, где δ расстояние точки от точки на границе в центре сферы, определяющей область (D), стремится к нулю вместе с δ, при условии, однако, что $k > 2$.

23. Положим теперь, что даны две точки M_1 и M_2, расстояние между которыми δ и из которых первая, скажем, лежит на нормали к границе в точке M^0, центре сферы, образующей границу области (D). Про δ положим, что оно меньше $\frac{d}{8}$ и что расстояние M_1 от M^0 меньше $\frac{d}{3}$.

Докажем, что разность между значениями вторых производных от интеграла (1) в точках M_1 и M_2 меньше числа вида $a\delta^{1-\lambda}$, где a не зависит от положения точек M_1 и M_2.

Положим, δ_1 расстояние M_1 от M^0, δ_2 расстояние M_2 от M^0. Если $\delta_1 < 3\delta$, то $\delta_2 < 4\delta$, и как 3δ, так и 4δ, меньше $\frac{d}{2}$.

Значит, в этом случае, вследствие примечания в параграфе 20-м, справедливость утверждения вытекает из сказанного в прошлых параграфах:

$$|P''_{M_1} - P''_{M_2}| \leq |P''_{M_1} - \underset{M_1 \to M_0}{\text{прд}}\, P''| + |\underset{M_1 \to M_0}{\text{прд}}\, P'' - P''_{M_2}| < a'\,\delta_1^{1-\lambda} + a''\,\delta_2^{1-\lambda} < a\delta^{1-\lambda}.$$

Рассмотрим теперь случай

$$\delta_1 > 3\delta.$$

Теорему достаточно доказать в предположении, что начало координат находится в точке M^0 и что за M^0Z взята нормаль в этой точке; другими словами, достаточно доказать теорему для разности интегралов (19).

Мы докажем ее, повторяя с небольшими изменениями рассуждения §§ 15, 16, 17.

24. Описываем в плоскости, касательной к границе в M^0, круг радиуса 2δ и берем первые три интеграла (19) сначала по этому кругу.

Для интегралов в точке M_1 доказано в параграфе 15-м, что они требуемого вида (13).

Переходя к интегралам в точке M_2, замечаем, что (черт. 14)

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{\sin\gamma}{\sin\eta}, \quad \sin\gamma = \frac{\delta}{\delta_1}\sin\eta < \frac{\delta}{\delta_1} < \frac{1}{3}, \quad \gamma < \frac{\pi}{6},$$

если γ угол треугольника $M^0\,M_2\,M_1$ противоположный δ.

Если α угол между δ_2 и r_0, а φ угол между r_0 и ее проекцией ρ на плоскость M^0XY, то

$$\alpha + \varphi + \gamma \geqq \frac{\pi}{2}.$$

Значит,

$$\alpha > \frac{\pi}{3} - \varphi.$$

Но φ, как угол между касательной и хордой, меньше угла $\frac{\pi}{2} - \omega_1$, где $2\omega_1$ угол растворения некоторого конуса, построенного на $M^0\,M_1$ как на оси.

При оценке этого угла ω_1 можно считать, что он соответствует сфере, радиус которой $d_1 = 2\delta$.

Так как

$$H(2\delta)^{1-\lambda} < \frac{H(2d)^{1-\lambda}}{8^{1-\lambda}},$$

угол ω_1 превосходит $40°$ и, значит, $\frac{\pi}{2} - \omega_1$ меньше $50°$, т. е. угол α не меньше некоторого угла α_0, и $\sin\alpha$ превосходит, пока угол α острый, некоторое число k:

$$\sin\alpha > k.$$

Примечание. Если $\lambda < \frac{2}{3}$, то $8^{1-\lambda} > 2$, и из сказанного в параграфе 14-м главы 1-й ясно, что $\omega_1 > 65°$, $\varphi < 30°$, $\alpha > 30°$, $k = \frac{1}{2}$.

Далее,

$$\frac{r_2}{r_0} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varepsilon}, \quad r_2 = \frac{r_0 \sin\alpha}{\sin\varepsilon}, \quad \frac{1}{r_2^2} < \frac{1}{r_0^2 \sin^2\alpha}.$$

Значит, пока угол α острый

$$\frac{1}{r_2^2} < \frac{1}{k^2 r_0^2};$$

при тупом α

$$\frac{1}{r_2^2} < \frac{1}{r_0^2}.$$

и, всегда,

$$\frac{1}{r_2^2} < \frac{1}{k^2 r_0^2}.$$

Отсюда ясно, что значения интегралов в точке M_2, взятых по указанной вырезке из границы, абсолютно меньше

$$2H\int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_2^2} < \frac{2H}{k^2}\int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_0^2} < \frac{4\pi H}{k^2}\int_0^{2\delta}\frac{\rho\,d\rho}{\rho^{1+\lambda}} =$$

$$= \frac{4\pi H}{k^2(1-\lambda)}(2\delta)^{1-\lambda}.$$

25. Если x_2, y_2, z_2 координаты точки M_2, то

$$r_2 = \sqrt{(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2 + (\zeta - z_2)^2}.$$

Изучаем разности между интегралами по остальной части границы, без поверхности полусферы.

Эти разности имеют вид

$$\int \cos Nx \left\{\frac{s}{r_1^3} - \frac{t}{r_2^3}\right\} d\sigma,$$

где или $s = \xi$, $t = \xi - x_2$, или $s = \eta$, $t = \eta - y_2$ или $s = \zeta - \delta_1$, $t = \zeta - z_2$.

Разности между двумя первыми интегралами можно дать вид

$$\int \cos Nx \cdot \mu \left\{\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right\} d\sigma + \int \frac{\cos Nx \cdot \nu}{r_2^3} d\sigma,$$

где или $\mu = \xi = \rho\cos\varphi$, $\nu = x_2$, или $\mu = \eta = \rho\sin\varphi$, $\nu = y_2$
и

$$|x_2| < \delta, \quad |y_2| < \delta.$$

Рассматриваем первое слагаемое.

Имеем (черт. 15)

$$\frac{r_1}{\delta_1} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta} > \sin\alpha' = \cos\varphi > \frac{1}{2},$$

ибо

$$\varphi < \frac{\pi}{2} - \omega < \frac{\pi}{3},$$

где ω половина угла растворения конуса параграфа 2-го главы 1-й, построенного в точке M^0. Вследствие этого,

$$r_1 > \frac{\delta_1}{2} > \frac{3}{2}\delta.$$

Так как

$$r_1 - \delta < r_2 \leq r_1 + \delta,$$

то

$$\frac{r_2}{r_1} < 1 + \frac{\delta}{r_1} < \frac{5}{3}; \quad \frac{r_2}{r_1} > 1 - \frac{\delta}{r_1} > \frac{1}{3}, \quad \frac{r_1}{r_2} < 3.$$

Вследствие этого,

$$\left|\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right| = \frac{|r_2 - r_1|\,(r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2)}{r_1^3 r_2^3} < \frac{|r_2 - r_1|}{r_1^4} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} + 1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} < \frac{a'\delta}{r_1^4}.$$

При этом,

$$r_0 = \frac{\rho}{\cos\varphi} < 2\rho, \quad r_1 > \rho.$$

Значит, первое слагаемое абсолютно меньше

$$2a'H\delta\int_{2\delta}^{d}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\rho^2\,d\rho\,d\varphi}{r_1^4} < 4a'\pi\cdot 2^{1-\delta}H\delta\int_{2\delta}^{d}\frac{\rho^{1-\lambda}\rho^2\,d\rho}{\rho^4} = bH\delta\int_{2\delta}^{d}\frac{d\rho}{\rho^{1+\lambda}} =$$

$$= \frac{bH\delta}{\lambda}\left\{\frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{d^\lambda}\right\},$$

т. е. вида (13).

Второе слагаемое абсолютно меньше

$$2H\delta\int_{2\delta}^{d}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_2^3} < 2H\cdot 3^3\delta\int_{2\delta}^{d}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_1^3} < 2\cdot 3^3\cdot 2\pi\cdot 2^{1-\lambda}H\delta\int_{2\delta}^{d}\frac{\rho^{2-\lambda}\,d\rho}{\rho^3} =$$

$$= a'H\delta\int_{2\delta}^{d}\frac{d\rho}{\rho^{1+\lambda}} = \frac{a'H\delta}{\lambda}\left\{\frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{d^\lambda}\right\},$$

т. е. опять вида (13).

Переходя к разности между третьими интегралами, пишем:

$$\int \cos Nx \left\{ \frac{\zeta - \delta_1}{r_1^3} - \frac{\zeta - z_2}{r_2^3} \right\} d\sigma =$$

$$= \int \cos Nx \zeta \left\{ \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right\} d\sigma + \int \cos Nx \left\{ \frac{z_2}{r_2^3} - \frac{\delta_1}{r_1^3} \right\} d\sigma.$$

Первый интеграл оцениваем, как соответствующий интеграл параграфа 16-го; он абсолютно меньше

$$2a\,a'\,H\delta \int_{2\delta}^{d} \int_{0}^{2\pi} \frac{\rho^{2-\lambda}\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_1^4} < 4a\,a'\,\pi\,H\delta \int_{2\delta}^{d} \frac{\rho^{2-\lambda}\,\rho\,d\rho}{\rho^4} =$$

$$= 4a\,a'\,\pi\,H\delta \int_{2\delta}^{d} \frac{d\rho}{\rho^{1+\lambda}} = \frac{4a\,a'\,\pi\,H\delta}{\lambda} \left\{ \frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{d^\lambda} \right\}.$$

Дав второму интегралу вид

$$\int \cos Nx \frac{z_2 - \delta_1}{r_2^3} d\sigma + \int \cos Nx\, \delta_1 \left\{ \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right\} d\sigma,$$

при оценке первого слагаемого замечаем, что

$$|z_2 - \delta_1| < \delta,$$

и видим, что оно абсолютно меньше

$$2H\delta \int_{2\delta}^{d} \int_{0}^{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda}\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_2^3} < 2\cdot 3^3\,H\delta \int_{2\delta}^{d} \int_{0}^{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda}\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_1^3} < 4\pi\cdot 2^{1-\lambda}\cdot 3^3\,H\delta \int_{2\delta}^{d} \frac{\rho^{1-\lambda}\,\rho\,d\rho}{\rho^3} =$$

$$= aH\delta \int_{2\delta}^{d} \frac{d\rho}{\rho^{1+\lambda}} = \frac{a\,H\delta}{\lambda} \left\{ \frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{d^\lambda} \right\}.$$

При оценке второго замечаем, что по сказанному выше

$$\frac{\delta_1}{r_1} < 2,$$

и потому интеграл абсолютно меньше

$$2Ha'\,\delta \int_{2\delta}^{d} \int_{0}^{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda}\,\delta_1\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_1^4} < 4Ha'\,\delta \int_{2\delta}^{d} \int_{0}^{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda}\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_1^3} < 8\pi\cdot 2^{1-\lambda}\,Ha'\,\delta \int_{2\delta}^{d} \frac{\rho^{1-\lambda}\,\rho\,d\rho}{\rho^3} =$$

$$= bH\delta \int_{2\delta}^{d} \frac{d\rho}{\rho^{1+\lambda}} = \frac{bH\delta}{\lambda} \left\{ \frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{d^\lambda} \right\}.$$

Итак, разность между третьими интегралами вида (13).

26. Остается разность между последними интегралами

$$P^0 = -\int \cos N N_0 \left\{ \frac{\cos r_1 N_0}{r_1^2} - \frac{\cos r_2 N_0}{r_2^2} \right\} d\sigma.$$

Представим, как в параграфе 17-м, P^0 в виде суммы трех интегралов

$$P^0 = P_1^0 + P_2^0 + P_3^0,$$

где

$$P_1^0 = -\int \frac{\cos r_1 N}{r_1^2} d\sigma + \int \frac{\cos r_2 N}{r_2^2} d\sigma = 0,$$

так как каждое слагаемое, вследствие того, что точки с одной стороны от поверхности области (D), или оба равны нулю, или оба то же число $\varepsilon \cdot 4\pi$;

$$P_2^0 = \int (1 - \cos N N_0) \left\{ \frac{\cos r_1 N}{r_1^2} - \frac{\cos r_2 N}{r_2^2} \right\} d\sigma,$$

$$P_3^0 = \int \cos N N_0 \left\{ \frac{\cos r_1 N - \cos r_1 N_0}{r_1^2} - \frac{\cos r_2 N - \cos r_2 N_0}{r_2^2} \right\} d\sigma.$$

Займемся интегралами P_2^0.

Берем их сначала по области, вырезанной цилиндром, построенным на круге радиуса 2δ.

Первый из них разобран в параграфе 17-м и вида $a\delta^{1-\lambda}$; в нем надо положить только

$$r_1 > \frac{\delta_1}{2} > \delta \quad \left(\text{вместо } r > \frac{\delta}{2}\right).$$

То же можно сказать и о втором; в нем надо положить

$$r_2 > \frac{r_1}{3} > \frac{\delta}{3}.$$

Интегралы, следовательно, вида (13).

Беря P_2^0 по остальной части границы без поверхности полусферы, пишем

$$|\cos(r_1 N) - \cos(r_2 N)| < 2 \left|\sin\left(\frac{r_1 r_2}{2}\right)\right| < |r_1 r_2| < \frac{\pi}{2} \sin(r_1 r_2) < a \frac{\delta}{r_1},$$

так как (черт. 16)

$$\sin(r_1 r_2) = \frac{\delta}{r_1} \sin\alpha < \frac{\delta}{r_1};$$

$$\frac{\cos r_1 N}{r_1^2} - \frac{\cos r_2 N}{r_2^2} = \cos r_1 N \left\{ \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right\} + \frac{1}{r_2^2} \left\{ \cos r_1 N - \cos r_2 N \right\}$$

1.

$$\left|\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right| = \frac{|r_2-r_1|(r_2+r_1)}{r_1^2 r_2^2} = \frac{|r_2-r_1|}{r_1^3}\,\frac{\frac{5}{3}+1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} < a_1'\frac{\delta}{r_1^3}.$$

Вследствие этого, имеем:

$$\left|\int(1-\cos NN_0)\frac{1}{r_2^2}(\cos r_1N-\cos r_2N)d\sigma\right| < 3^2\cdot 2H\delta\int_{2\delta}^{d}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_1^3} < 3^2\cdot 4\pi\,2^{1-\lambda}H\delta\int_{2\delta}^{d}\frac{\rho^{2-\lambda}d\rho}{\rho^3} =$$

$$= a'H\delta\int_{2\delta}^{d}\frac{d\rho}{\rho^{1+\lambda}} = \frac{a'H\delta}{\lambda}\left\{\frac{1}{(2\delta)^\lambda}-\frac{1}{d^\lambda}\right\},$$

$$\left|\int(1-\cos NN_0)\cos r_1N\left\{\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right\}d\sigma\right| < 2a_1'\delta H\int_{2\delta}^{d}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_1^3} < 4\pi\cdot 2^{1-\lambda}a_1'\delta H\int_{2\delta}^{d}\frac{\rho^{2-\lambda}d\rho}{\rho^3} =$$

$$= \frac{bH\delta}{\lambda}\left\{\frac{1}{(2\delta)^\lambda}-\frac{1}{d^\lambda}\right\}.$$

Разность интегралов вида (13).

Переходя к P_3^0, берем сначала интегралы по области, вырезанной цилиндром, построенным на круге радиуса 2δ (черт. 17)

$$\left|\cos r_1N-\cos r_1N_0\right| < 2\left|\sin\frac{NN_0}{2}\right| < Hr_0^{1-\lambda},$$

$$\left|\cos r_2N-\cos r_2N_0\right| < 2\left|\sin\frac{NN_0}{2}\right| < Hr_0^{1-\lambda},$$

$$\left|\int\cos NN_0\,\frac{\cos r_1N-\cos r_1N_0}{r_1^2}\,d\sigma\right| < 2H\int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_1^2} < 4\pi\cdot 2^{1-\lambda}H\int_0^{2\delta}\frac{\rho^{2-\lambda}d\rho}{\rho^2} =$$

$$= \frac{4\pi\cdot 2^{1-\lambda}H}{1-\lambda}\cdot(2\delta)^{1-\lambda},$$

$$\left|\int\cos NN_0\,\frac{\cos r_2N-\cos r_1N_0}{r_2^2}\,d\sigma\right| < 2H\int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_2^2} < 2\cdot 3^2H\int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^{1-\lambda}\rho\,d\rho\,d\varphi}{r_1^2} <$$

$$< \frac{4\pi\cdot 3^2\cdot 2^{1-\lambda}H}{1-\lambda}(2\delta)^{1-\lambda}.$$

Остается интеграл по остальной части границы без поверхности сферы.

Замечаем, что

$$\frac{\cos r_1 N - \cos r_1 N_0}{r_1^2} - \frac{\cos r_2 N - \cos r_2 N_0}{r_2^2} =$$

$$(21') \qquad = \frac{(r_1 \cos r_1 N - r_2 \cos r_2 N) - (r_1 \cos r_1 N_0 - r_2 \cos r_2 N_0)}{r_2^3} +$$

$$+ r_1 (\cos r_1 N - \cos r_1 N_0) \left\{ \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right\},$$

выполнив в тожестве (21) замену r_0 и r на r_1 и r_2.

При этом

$$r_1 \cos r_1 N - r_2 \cos r_2 N = \delta \cos(\delta N), \quad r_1 \cos r_1 N_0 - r_2 \cos r_2 N_0 = \delta \cos(\delta N_0)$$

и

$$\left| \delta \cos(\delta N) - \delta \cos(\delta N_0) \right| \leqq \delta \cdot 2 \left| \frac{\sin N N_0}{2} \right| < H r_0^{1-\lambda} \delta.$$

Вследствие тожества (21'), разбиваем P_3^0 на два интеграла.

Первый по абсолютной величине меньше

$$2H\delta \int_{2\delta}^{d} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda} \rho \, d\rho \, d\varphi}{r_2^3} < 2H\, 3^3 \cdot \delta \int_{2\delta}^{d} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda} \rho \, d\rho \, d\varphi}{r_1^3} < 4\pi \cdot 3^3 \cdot 2^{1-\lambda} H\delta \int_{2\delta}^{d} \frac{\rho^{2-\lambda} \, d\rho}{\rho^3} =$$

$$= aH\delta \int_{2\delta}^{d} \frac{d\rho}{\rho^{1+\lambda}} = \frac{aH\delta}{\lambda} \left\{ \frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{d^\lambda} \right\}.$$

Второй, так как

$$\left| \cos r_1 N - \cos r_1 N_0 \right| < 2 \left| \sin \frac{N N_0}{2} \right| < H r_0^{1-\lambda}, \quad \left| \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right| < \frac{a' \delta}{r_1^4},$$

абсолютно меньше

$$2Ha' \delta \int_{2\delta}^{d} \int_0^{2\pi} \frac{r_1 \cdot r_0^{1-\lambda} \rho \, d\rho \, d\varphi}{r_1^4} < 4\pi \cdot 2^{1-\lambda} a' H\delta \int_{2\delta}^{d} \frac{\rho^{2-\lambda} \, d\rho}{\rho^3} = b H\delta \int_{2\delta}^{d} \frac{d\rho}{\rho^{1+\lambda}} =$$

$$= \frac{bH\delta}{\lambda} \left\{ \frac{1}{(2\delta)^\lambda} - \frac{1}{d^\lambda} \right\}.$$

Итак, и этот интеграл вида (13).

27. Оценка разностей между частями интегралов, взятыми на поверхности полусферы, приводит, как и в параграфе 14-м, к заключению, что они вида

$$a\delta.$$

Вследствие этого, утверждение, высказанное в параграфе 23-м, можно считать установленным.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Исследование одного интеграла.

1. Положим, что

(1) $$L(q_1, q_2, q_3, t)$$

есть функция от переменных q_1, q_2, q_3 и переменного t, непрерывная внутри каждой из областей, на которые разделено границами пространство (Q) и могущая терпеть разрыв непрерывности только при переходе точкой $M(q_1, q_2, q_3)$ границы.

Положим, что во всякой точке M не на границе функция L имеет непрерывную производную по t при рассматриваемом значении t.

Положим, что функция L и производная $\frac{\partial L}{\partial t}$ ограничены во всем пространстве (Q), т. е., что

(I) $$|L| < N, \quad \left|\frac{\partial L}{\partial t}\right| < N^{(1)},$$

где N и $N^{(1)}$ функции от t, все значения которых положительны.

Обозначая через ρ расстояние точки M от начала координат, положим еще, что

(I') $$\rho^4 |L| < N, \quad \rho^4 \left|\frac{\partial L}{\partial t}\right| < N^{(1)}.$$

Кроме того, обозначая через r расстояние от точки M до некоторой другой M', расположенной по одну сторону от границы с M, положим, что

(II) $$[L] < Nr^{1-\lambda}, \; \rho^4 [L] < Nr^{1-\lambda}, \; \left[\frac{\partial L}{\partial t}\right] < N^{(1)} r^{1-\lambda}, \; \rho^4 \left[\frac{\partial L}{\partial t}\right] < N^{(1)} r^{1-\lambda}.$$

Сверх всего этого мы положим, что когда точка M стремится к точке M_0 на границе, не выходя из некоторой области, то как L, так и $\frac{\partial L}{\partial t}$ стремятся к определенным пределам

$$(L)_1 \text{ или } (L)_2 \text{ и } \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_1 \text{ или } \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_2,$$

смотря по тому, в первой или во второй области перемещается M; при этом, если r_0 расстояние от M до M_0, то

(III) $$|L-(L)|<Nr_0^{1-\lambda}, \quad \left|\frac{\partial L}{\partial t}-\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)\right|<N^{(1)}r_0^{1-\lambda}.$$

Чтобы не увеличивать числа предположений об L, докажем, что (L) имеет производную по t и что эта производная $\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)$.

Дадим t приращение τ и найдем точку M, столь близкую к M_0, чтобы при рассматриваемых значениях t

$$Nr_0^{1-\lambda}<\frac{\varepsilon\tau}{3}, \quad N^{(1)}r_0^{1-\lambda}<\frac{\varepsilon}{3},$$

где ε произвольно выбранное положительное число.

Обозначая значения функций при $t+\tau$ значками наверху, имеем:

$$|(L)-L|<\frac{\varepsilon\tau}{3}, \quad |(L)'-L'|<\frac{\varepsilon\tau}{3}, \quad \left|\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)-\frac{\partial L}{\partial t}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как

$$L'-L=\int\limits_t^{t+\tau}\frac{\partial L}{\partial t}\,dt,$$

получаем

$$(L)'-(L)=\int\limits_t^{t+\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)dt+\vartheta\frac{\varepsilon\tau}{3}+\vartheta'\frac{\varepsilon\tau}{3}+\int\limits_t^{t+\tau}\vartheta''\frac{\varepsilon}{3}\,dt, \quad |\vartheta|<1$$

и

$$\left|\frac{(L)'-(L)}{\tau}-\frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)dt\right|<\varepsilon.$$

Из возможности удовлетворить этому неравенству при произвольном τ вытекает

$$\frac{\partial(L)}{\partial t}=\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right).$$

2. Условимся обозначать буквами p_1, p_2, p_3 переменные интегрирования и обозначать буквой L функцию

$$L(p_1, p_2, p_3, t),$$

когда она стоит под знаком интеграла.

Далее, положим

$$(2)\qquad \xi = p_1 + \int_0^t u(p_1, p_2, p_3, \tau)\, d\tau, \qquad \eta = p_2 + \int_0^t v(p_1, p_2, p_3, \tau)\, d\tau,$$

$$\zeta = p_3 + \int_0^t w(p_1, p_2, p_3, \tau)\, d\tau$$

и, положив для сокращения

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2, \quad d\omega = dp_1\, dp_2\, dp_3,$$

составим три интеграла, распространив в них интегрирование по всему пространству:

$$(3)\qquad U = \int \frac{L(\xi - x)}{r^3} d\omega, \quad V = \int \frac{L(\eta - y)}{r^3} d\omega, \quad W = \int \frac{L(\zeta - z)}{r^3} d\omega.$$

Заметим, что вследствие сказанного в параграфе 9-м главы 1-й, $r = 0$ только тогда, когда $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, $p_3 = q_3$.

Про интегралы (3) мы, кроме их сходимости, прежде всего докажем, что они непрерывные функции q_1, q_2, q_3 во всем пространстве (Q) и во всякой точке пространства непрерывные функции t.

Ввиду симметрии, мы проведем доказательство для интеграла U.

3. Обозначим через r_0 расстояние между точками (p_1, p_2, p_3) и (q_1, q_2, q_3). Так как

$$\xi - x = p_1 - q_1 + \int_0^t \big(u(p_1, p_2, p_3, \tau) - u(q_1, q_2, q_3, \tau)\big)\, d\tau,$$

$$\eta - y = p_2 - q_2 + \int_0^t \big(v(p) - v(q)\big)\, d\tau, \quad \zeta - z = p_3 - q_3 + \int_0^t \big(w(p) - w(q)\big)\, d\tau,$$

то ясно, что

$$r_0 - 3Br_0 < r < r_0 + 3Br_0,$$

где

$$r_0 = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2},$$

и

$$(4)\qquad \frac{r_0}{r} < \frac{1}{1 - 3B} < a_0,$$

где a_0 некоторое число; можно положить $a_0 = \frac{3}{2}$.

Далее, очевидно

$$\left|\frac{\xi - x}{r^3}\right| < \frac{1}{r^2} < \frac{a_0^2}{r_0^2},$$

и, значит, мы имеем

$$|U| < a_0^2 \int |L| \frac{d\omega}{r_0^2}.$$

Возьмем интеграл сначала по сфере некоторого радиуса R_0 с центром в начале координат, потом по пространству между этой сферой и другой радиуса R, где $R > R_0$.

Точка $M(q_1, q_2, q_3)$ может находиться внутри сферы R_0 или вне ее.

Вводя полярные координаты с полюсом в начале координат, имеем:

$$|U_{R_0}| < a_0^2 N \int_0^{R_0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}{r_0^2} = \frac{a_0^2 N}{\rho_0} \int_0^{R_0} \int_{|\rho-\rho_0|}^{\rho+\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{\rho \, d\rho \, dr_0 \, d\varphi}{r_0},$$

если вместо переменных ρ, θ, φ ввести переменные r, r_0, φ, где

$$r_0 = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \operatorname{Cos}\theta}$$

и ρ_0 расстояние M_0 от начала координат.

При этом, полярная ось нами проведена через точку M_0 (черт. 18).

Примечание. Если M_0 совпадает с началом координат, то

$$r_0 = \rho$$

и

$$|U_{R_0}| < a_0^2 N \int_0^{R_0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = 4\pi a_0^2 N R_0.$$

Итак,

$$|U_{R_0}| < \frac{2a_0^2 \pi N}{\rho_0} \int_0^{R_0} \rho \left(\log(\rho + \rho_0) - \log|\rho - \rho_0|\right) d\rho.$$

Если точка M_0 внутри сферы R_0, то

$$|U_{R_0}| < \frac{2a_0^2 \pi N}{\rho_0} \int_0^{\rho_0} \rho \left(\log(\rho + \rho_0) - \log(\rho_0 - \rho)\right) d\rho +$$

$$+ \frac{2a_0^2 \pi N}{\rho_0} \int_{\rho_0}^{R_0} \rho \left(\log(\rho + \rho_0) - \log(\rho - \rho_0)\right) d\rho.$$

Первый из указанных интегралов равен

$$4\pi a_0^2 N \int_0^{\rho_0} \left\{ \frac{\rho^2}{\rho_0^2} + \frac{1}{3} \frac{\rho^4}{\rho_0^4} + \cdots \right\} d\rho = 2\pi a_0^2 N \rho_0,$$

так как

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} + \cdots = \frac{1}{2}.$$

Второй интеграл равен

$$4\pi a_0^2 N \int_{\rho_0}^{R_0} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\rho_0^2}{\rho^2} + \frac{1}{5} \frac{\rho_0^4}{\rho^4} + \cdots \right) d\rho = 4\pi a_0^2 N \varphi(R_0) - 2\pi a_0^2 N \rho_0,$$

где

$$\varphi(R_0) = R_0 - \frac{1}{3} \frac{\rho_0^2}{R_0} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{\rho_0^4}{R_0^3} - \cdots < R_0.$$

Итак, в рассматриваемом случае

$$(5) \qquad |U_{R_0}| < 4\pi a_0^2 N R_0.$$

Если точка M_0 вне сферы (R_0), то

$$|U_{R_0}| < \frac{2\pi a_0^2 N}{\rho_0} \int_0^{R_0} \rho \left(\log(\rho + \rho_0) - \log(\rho_0 - \rho) \right) d\rho =$$

$$= 4\pi a_0^2 N \int_0^{R_0} \left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2} + \frac{1}{3} \frac{\rho^4}{\rho_0^4} + \cdots \right) d\rho$$

и

$$|U_{R_0}| < 4\pi a_0^2 N \left\{ \frac{1}{3} \frac{R_0^3}{\rho_0^2} + \frac{1}{3 \cdot 5} \frac{R_0^5}{\rho_0^4} + \cdots \right\}.$$

Так как

$$\frac{R_0}{\rho_0} < 1,$$

из последнего неравенства имеем:

$$(5') \qquad |U_{R_0}| < 2\pi a_0^2 N R_0, \quad \rho_0^2 |U_{R_0}| < 2\pi a_0^2 N R_0^3.$$

Переходя к интегралу между сферами R_0 и R, пользуемся неравенством

$$\rho^4 |L| < N$$

и пишем

$$|U_{R_0}^R| < a_0^2 N \int_{R_0}^{R}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^2}\frac{\sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi}{r_0^2} = \frac{a_0^2 N}{\rho_0}\int_{R_0}^{R}\int_{|\rho-\rho_0|}^{\rho+\rho_0}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho^3}\frac{d\rho\, dr_0\, d\varphi}{r_0} =$$

$$= \frac{2a_0^2\pi N}{\rho_0}\int_{R_0}^{R}\frac{1}{\rho^3}\{\log(\rho+\rho_0) - \log|\rho-\rho_0|\}\, d\rho.$$

Если точка M_0 внутри сферы (R_0), то

$$|U_{R_0}^R| < \frac{2a_0^2\pi N}{\rho_0}\int_{R_0}^{R}\frac{1}{\rho^3}\{\log(\rho+\rho_0) - \log(\rho-\rho_0)\}\, d\rho =$$

$$4\pi a_0^2 N\int_{R_0}^{R}\left(\frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{3}\frac{\rho_0^2}{\rho^6} + \frac{1}{5}\frac{\rho_0^4}{\rho^8} + \cdots\right) d\rho = 4\pi a_0^2 N(\varphi(R_0) - \varphi(R)),$$

где

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\rho^3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{\rho_0^2}{\rho^5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{\rho_0^4}{\rho^7} + \cdots.$$

Так как

$$\rho_0 < R_0,$$

то

$$\varphi(R_0) < \frac{1}{2R_0^3};$$

при

$$R = \infty, \quad \varphi(R) = 0.$$

Итак, в рассматриваемом случае

(6) $$|U_{R_0}^R| < 2a_0^2\pi N\frac{1}{R_0^3}.$$

Если точка M_0 вне сферы (R_0), то

$$|U_{R_0}^R| = \frac{2\pi a_0^2 N}{\rho_0}\int_{R_0}^{\rho_0}\frac{1}{\rho^3}\{\log(\rho+\rho_0) - \log(\rho_0-\rho)\}\, d\rho +$$

$$+ \frac{2\pi a_0^2 N}{\rho_0}\int_{\rho_0}^{R}\frac{1}{\rho^3}\{\log(\rho+\rho_0) - \log(\rho-\rho_0)\}\, d\rho.$$

Первый интеграл равен

$$4\pi a_0^2 N\int_{R_0}^{\rho_0}\left\{\frac{1}{\rho^2\rho_0^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\rho_0^4} + \frac{1}{5}\frac{\rho^2}{\rho_0^6} + \cdots\right\} d\rho = 4\pi a_0^2 N\{\psi(\rho_0) - \psi(R_0)\}$$

где

$$\psi(\rho) = -\frac{1}{\rho\,\rho_0^2} + \frac{1}{3}\frac{\rho}{\rho_0^4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\frac{\rho^3}{\rho_0^6} + \cdots.$$

Так как

$$\psi(\rho_0) = -\frac{1}{2\rho_0^3}, \quad \psi(R_0) = -\frac{1}{R_0\,\rho_0^2} + \frac{1}{3}\frac{R_0}{\rho_0^4} + \frac{1}{3\cdot 5}\frac{R_0^3}{\rho_0^6} + \cdots, \quad \frac{R_0}{\rho_0} < 1,$$

первый интеграл меньше

$$\frac{4\pi a_0^2 N}{R_0\,\rho_0^2}.$$

Второй интеграл равен

$$4\pi a_0^2 N \int\limits_{\rho_0}^{R} \left(\frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{3}\frac{\rho_0^2}{\rho^6} + \frac{1}{5}\frac{\rho_0^4}{\rho^8} + \cdots\right) d\rho = 4\pi a_0^2 N \{\varphi(\rho_0) - \varphi(R)\}.$$

Здесь

$$\varphi(\rho_0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\rho_0^3}, \quad \varphi(R) = 0, \text{ при } R = \infty.$$

Итак, второй интеграл меньше

$$\frac{2\pi a^2 N}{\rho_0^3}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае

$$(6') \qquad \begin{cases} |U_{R_0}^{R}| < \dfrac{4\pi a_0^2 N}{R_0\,\rho_0^2} + \dfrac{2\pi a_0^2 N}{\rho_0^3} < \dfrac{6\pi a_0^2 N}{R_0^3}; \\[2ex] \rho^2 |U_{R_0}^{R}| < \dfrac{4\pi a_0^2 N}{R_0} + \dfrac{2\pi a_0^2 N}{\rho_0} < \dfrac{6\pi a_0^2 N}{R_0}. \end{cases}$$

Из сказанного ясно, что интегралы сходящиеся; число R_0 мы можем выбрать по своему усмотрению и, значит, можем писать

$$(7) \qquad |U| < aN, \quad \rho_0^2 |U| < aN,$$

где a некоторое число.

Примечание. Заметим, что в рассуждениях этого параграфа мы пользовались только условиями (I), (I′) о функции L; условия (II) и (III) нам были не нужны, и мы могли бы выполнить все выкладки и в том случае, если бы их не было в числе заданий, определяющих функцию L.

4. Переходим к доказательству непрерывности U, как функции точки $M(q_1, q_2, q_3)$.

Возьмем две точки $M(q_1, q_2, q_3)$ и $M'(q_1', q_2', q_3')$, расстояние между которыми δ. Около точки M опишем две сферы: сферу радиуса 2δ и сферу радиуса D, где D некоторое число.

Около начала координат опишем две сферы: сферу радиуса R_0, где R_0 настолько велико, что сфера (D) заключается внутри сферы (R_0), и сферу радиуса R, где $R > R_0$.

Интеграл U разобьем на четыре части: по сфере (2δ), по пространству между сферами (2δ) и (D), по пространству между сферами (D) и (R_0) и по пространству между сферами (R_0) и (R).

Если U' значение U в M', то

$$U' - U = (U')_{2\delta} - (U)_{2\delta} + (U' - U)_{2\delta}^{D} + (U' - U)_{D}^{R_0} + (U' - U)_{R_0}^{R}.$$

Но

$$|U_{2\delta}| < a_0^2 N \int_0^{2\delta}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, dr_0 \, d\theta \, d\varphi = 4\pi a_0^2 N \cdot 2\delta.$$

Также

$$|U'_{2\delta}| < a_0^2 N \int_0^{3\delta}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = 4\pi a_0^2 N \cdot 3\delta,$$

так как сфера радиуса 3δ, описанная около M', заключает в себе сферу (2δ).

Изучаем разность

$$\frac{\xi - x'}{r'^3} - \frac{\xi - x}{r^3},$$

где x' и r' значения x и r в точке M'.

Ясно, что эта разность равна

$$(x - x') \left.\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\right|_1 + (y - y') \left.\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial y}\right|_1 + (z - z') \left.\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial z}\right|_1,$$

где значок (1) говорит, что производные от $\frac{1}{r}$ вычислены в точке

$$(8) \quad \xi - x + \theta(x' - x), \quad \eta - y + \theta(y' - y), \quad \zeta - z + \theta(z' - z), \quad 0 < \theta < 1.$$

Так как сумма квадратов производных

$$\left(\frac{3(\xi - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{3(\xi - x)(\eta - y)}{r^5}\right)^2 + \left(\frac{3(\xi - x)(\zeta - z)}{r^5}\right)^2 < \frac{4}{r^6},$$

имеем

$$\left|\frac{\xi - x'}{r'^3} - \frac{\xi - x}{r^3}\right| < 3\delta B \cdot \frac{2}{r_1^{\,3}}.$$

где r_1 значение r в точке (8), так как, как мы убеждались неоднократно,

$$|x - x'| < \sqrt{3}\,\delta B, \quad |y - y'| < \sqrt{3}\,\delta B, \quad |z - z'| < \sqrt{3}\,\delta B.$$

Из последних неравенств и из (8) ясно, что

$$r - 3\delta B < r_1 < r + 3\delta B,$$

т. е., так как $r_0 > 2\delta$,

$$\frac{r_1}{r} > 1 - \frac{3B\delta}{r} > 1 - \frac{\delta}{3r} = 1 - \frac{\delta}{3}\,\frac{r_0}{r}\cdot\frac{1}{r_0} > 1 - \frac{\delta}{3}\,\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{r_0} > 1 - \frac{1}{2}\,\frac{\delta}{2\delta} = \frac{3}{4}$$

и

$$\frac{r}{r_1} < \frac{4}{3}, \quad \frac{r_0}{r_1} < \frac{4r_0}{3r} < 2.$$

Итак, окончательно

$$\left|\frac{\xi - x'}{r'^3} - \frac{\xi - x}{r^3}\right| < 6B\cdot\delta\cdot\frac{2^3}{r_0^{\,3}} < a'\,\frac{\delta}{r_0^{\,3}}.$$

Переходя к разности $(U' - U)_{2\delta}^{D}$, имеем

$$|(U' - U)_{2\delta}^{D}| < a' N\delta \int\limits_{2\delta}^{D}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin\theta\, dr_0\, d\theta\, d\varphi}{r_0} = a'' N\delta\{\log D - \log 2\delta\}.$$

Для остальных двух разностей

$$r_0 > D,$$

и потому имеем

$$|(U' - U)_{D}^{R_0}| < \frac{a' N\delta}{D^3}\int\limits_{0}^{R_0}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \sin\theta\,\rho^2\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi a' N\delta}{3D^3} R_0^{\,3},$$

$$|(U' - U)_{R_0}^{R}| < \frac{a' N\delta}{D^3}\int\limits_{R_0}^{R}\int\limits_{0}^{R}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi}{\rho^2} = \frac{4\pi a' N\delta}{D^3}\left\{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right\}.$$

Из сказанного ясно, что разность $U' - U$ бесконечно мала вместе с δ.

5. Переходим к доказательству непрерывности U, как функции от t. Давая t приращенное значение t', будем обозначать значками наверху соответственные значения встречающихся функций.

Имеем

$$U' - U = \int \frac{L'(\xi' - x')}{r'^3} d\omega - \int \frac{L(\xi - x)}{r^3} d\omega = \tag{9}$$

$$= \int (L' - L) \frac{\xi' - x'}{r'^3} d\omega + \int L \left\{ \frac{\xi' - x'}{r'^3} - \frac{\xi - x}{r^3} \right\} d\omega.$$

Мы имеем, указывая только зависимость L от t,

$$L' - L = (t' - t) L_t'(t + \theta(t' - t)), \quad 0 < \theta < 1.$$

Так как $\frac{\partial L}{\partial t}$ удовлетворяет тем же неравенствам, которыми мы пользовались для L в параграфе 3-м, с единственной разницей, что N заменено через $N^{(1)}$, мы можем, пользуясь результатами параграфа 3-го, писать

$$\left| \int (L' - L) \frac{\xi' - x'}{r'^3} d\omega \right| < |t' - t| a N^{(1)}.$$

Остается второй из интегралов (9).

Легко получаем, что

$$|(\xi' - x') - (\xi - x)| =$$

$$= \left| \int_t^{t'} \left(u(p_1, p_2, p_3, \tau) - u(q_1, q_2, q_3, \tau) \right) d\tau \right| < \sqrt{3}\, r_0 \int_t^{t'} A\, dt < \sqrt{3}\, r_0 b\, |t' - t|$$

и такие же неравенства для разностей

$$|(\eta' - y') - (\eta - y)| \text{ и } |(\zeta' - z') - (\zeta - z)|.$$

Далее, разность

$$\frac{\xi' - x'}{r'^3} - \frac{\xi - x}{r^3}$$

равна

$$\left((\xi' - x') - (\xi - x)\right) \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} \Bigg|' + \left((\eta' - y') - (\eta - y)\right) \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x\, \partial y} \Bigg|' +$$

$$+ \left((\zeta' - z') - (\zeta - z)\right) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z} \Bigg|',$$

где значок (′) говорит, что производные от $\frac{1}{r}$ вычислены в точке

$$(10)\left\{\begin{array}{l}\xi - x + \theta\{(\xi' - x') - (\xi - x)\}, \quad \eta - y + \theta\{(\eta' - y') - (\eta - y)\}, \\ \qquad \zeta - z + \theta\{(\zeta' - z') - (\zeta - z)\}, \quad 0 < \theta < 1.\end{array}\right.$$

Вспоминая сказанное в параграфе 4-м, прежде всего имеем:

$$\left|\frac{\xi' - x'}{r'^3} - \frac{\xi - x}{r^3}\right| < 3\,b\,|t' - t|\,r_0\,\frac{2}{r_1'^3},$$

где r_1' соответствует числам (10).

При этом,

$$r_0\{1 - 3(B + b'(t' - t))\} < r'_1 < r_0\{1 + 3(B + b(t' - t))\},$$

следствие чего, при достаточно близком t' к t, можно положить

$$\frac{r_0^3}{r_1'^3} < c,$$

где c некоторое число.

Вследствие этого,

$$\left|\frac{\xi' - x'}{r'^3} - \frac{\xi - x}{r^3}\right| < 3b\,|t' - t|\,r_0\,\frac{2c}{r_0^3} = \frac{c'\,|t' - t|}{r_0^2}$$

и

$$\left|\int L\left\{\frac{\xi' - x'}{r^3} - \frac{\xi - x}{r^3}\right\}d\omega\right| < c'\,|t' - t|\int|L|\frac{d\omega}{r_0^2}.$$

Последний же интеграл рассмотрен в параграфе 3-м.

Итак, имеем окончательно

$$|U' - U| < \{aN^{(1)} + ac'N\}\,|t' - t|,$$

откуда вытекает непрерывность U, как функции от t.

6. Переходя к доказательству существования производных по q_1, q_2, q_3 у интегралов (3) во всякой точке $M(q_1, q_2, q_3)$, не лежащей на границе, заметим, что достаточно доказать существование и непрерывность производных по x, y и z.

Действительно, так как существование производных по q_1, q_2, q_3 у x, y и z установлено, то, например,

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_i}.$$

Для доказательства существования этих производных, а также для изучения их свойств, удобно преобразовать интегралы (3), выбрав ξ, η и ζ за переменные интегрирования.

Решив, руководствуясь сказанным в параграфе 7-м главы 1-й, систему уравнений

$$\xi = p_1 + \int_0^t u(p_1, p_2, p_3, \tau)\, d\tau, \quad \eta = p_2 + \int_0^t v(p_1, p_2, p_3, \tau)\, d\tau,$$

$$\zeta = p_3 + \int_0^t w(p_1, p_2, p_3, \tau)\, d\tau$$

относительно p_1, p_2, p_3 и выразив под знаками интегралов p_1, p_2, p_3 через ξ, η, ζ, мы получим интегралы

$$(11) \quad \begin{cases} U = \int \frac{K(\xi - x)}{r^3}\, d\zeta\, d\eta\, d\xi, \quad V = \int \frac{K(\eta - y)}{r^3}\, d\zeta\, d\eta\, d\xi, \\ W = \int \frac{K(\zeta - z)}{r^3}\, d\zeta\, d\eta\, d\xi, \end{cases}$$

в которых

$$K = LJ,$$

где

$$J = \left| \frac{\partial p_1}{\partial \xi}, \ \frac{\partial p_2}{\partial \eta}, \ \frac{\partial p_3}{\partial \zeta} \right| = \frac{1}{I},$$

а I определитель параграфа 8-го главы 1-й.

Интегралы (11) распространены по всему пространству (Ξ).

Функция K непрерывна внутри каждой из областей, на которые границами разделено пространство (Ξ), так как L терпит разрыв непрерывности только при переходе точкой $M(p_1, p_2, p_3)$ границы пространства (Q) и, значит, только при переходе точкой $m(\xi, \eta, \zeta)$, соответствующей M, границы пространства (Ξ); то же самое можно утверждать об I и об J.

Далее, так как

$$|J| = \left| \frac{1}{I} \right| < \frac{1}{1 - 3B} < a,$$

ясно, что

$$(12) \qquad |K| < aN, \quad r^4 |K| < aN,$$

где a некоторое число, буквой r временно обозначено расстояние от начала координат пространства (Ξ) до точки $m(x, y, z)$; из сказанного в главе 1-й ясно, что

$$r < \rho a_0 + B < \rho a',$$

если ρ достаточно велико.

Из формул параграфа 13-го главы 1-й вытекает, что

$$(13) \qquad \left[\frac{\partial p_i}{\partial \xi}\right] < a\rho^{1-\lambda}, \quad \left[\frac{\partial p_i}{\partial \eta}\right] < a\rho^{1-\lambda}, \quad \left[\frac{\partial p_i}{\partial \zeta}\right] < a\rho^{1-\lambda},$$

где ρ расстояние между двумя точками пространства (Ξ), расположенными по одну сторону от границы (Ξ), а знак [ ] соответствует разности значений в этих точках.

Так как по формулам параграфа 7-го во всем пространстве (Ξ)

$$(14) \qquad \left|\frac{\partial p_i}{\partial \xi}\right| < a', \quad \left|\frac{\partial p_i}{\partial \eta}\right| < a', \quad \left|\frac{\partial p_i}{\partial \zeta}\right| < a',$$

где a' некоторое число, легко получаем, пользуясь неравенствами (13) и (14),

$$[J] < a'' \rho^{1-\lambda},$$

где a'' некоторое число.

Так как, если ищется разность между значениями K в точках m_1 и m_2

$$[K] < [L]\,|J_{m_2}| + |L_{m_1}|\,[J],$$

то вследствие неравенств параграфа 1-го этой главы:

$$(15) \qquad [K] < aN\rho^{1-\lambda}, \quad r^4[K] < aN\rho^{1-\lambda},$$

причем число a, достаточно увеличив его, можно считать одним и тем же в неравенствах (12) и (15).

Из сказанного в параграфе 6-м главы 1-й вытекает, что, когда точка $M(p_1, p_2, p_3)$ приближается к точке $M_0(p_1^0, p_2^0, p_3^0)$ на границе (Q), не выходя из некоторой области, I стремится к определенному пределу $(I)_\alpha$, причем

$$|I - (I)_\alpha| < a_1 r_0^{1-\lambda},$$

где r_0 расстояние от M до M_0.

Следовательно, когда точка $m(\xi, \eta, \zeta)$ приближается к точке $m_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ на границе (Ξ), J также стремится к определенному пределу, и так как

$$J_m - (J)_\alpha = \frac{1}{I_m} - \frac{1}{(I)_\alpha} = \frac{(I)_\alpha - I_m}{I_m (I)_\alpha}, \quad |I_m| > k > 0, \quad (I)_\alpha \geqq k > 0,$$

где k некоторое число, имеем

$$|J_m - (J)_\alpha| < a_1' \rho_0^{1-\lambda},$$

где ρ_0 расстояние от m до m_0.

Из сказанного вытекает, вследствие неравенств параграфа 1-го этой главы:

$$(16) \qquad |K - (K)_\alpha| < a N \rho_0^{1-\lambda},$$

где $(K)_\alpha$ предел, к которому стремится K, когда m стремится к m_0.

Число a в формуле (16) можно считать не отличным от входящего в формулы (12) и (15).

7. Вследствие симметрии интегралов (11), достаточно доказать существование производных от U по x и по y.

Положим, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ не лежит на границе и положим, что расстояние ее от границы 2δ. Доказываем существование производной по x.

Даем x_0 приращение h такое, что

$$2|h| < \delta,$$

и строим две сферы с центром в точке M_0: сферу радиуса 2δ и сферу, радиус которой $2|h|$.

Интеграл U разбиваем пока на два: на интеграл по сфере (2δ), который мы обозначим через U', и по остальному пространству, который обозначим через U'':

$$U = U' + U''.$$

Докажем сначала существование производной у U''.

Положим

$$(17) \qquad \left(\frac{\partial U''}{\partial x}\right)_0 = \int K \left\{ \frac{3(\xi - x_0)^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3} \right\} d\zeta\, d\eta\, d\xi,$$

где r_0 расстояние точки M_0 от переменной точки $M(\xi, \eta, \zeta)$, и интегрирование распространим по области вне сферы (2δ).

Интеграл в правой части последнего равенства сходящийся. Чтобы убедиться в этом, достаточно оценить его часть, распространенную по

области между сферами R_0 и R, где $R > R_0$ и R_0 таково, что сфера (2δ) находится внутри R_0. Мы имеем для такой области:

$$\left|\int K \left\{\frac{3(\xi - x_0)^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3}\right\} d\zeta\, d\eta\, d\xi\right| < 4aN \int \frac{1}{\rho^4} \cdot \frac{d\zeta\, d\eta\, d\xi}{r_0^3} < \frac{4aN \cdot 4\pi}{(2\delta)^3} \int_{R_0}^{R} \frac{d\rho}{\rho^2} =$$

$$= \frac{2\pi a N}{\delta^3}\left\{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right\}.$$

Интеграл остается конечным при $R = \infty$ и стремится к нулю при увеличении R_0.

Отмечая зависимость U от x, изучаем разность

$$\frac{U''(x_0 + h) - U''(x_0)}{h} - \left(\frac{\partial U''}{\partial x}\right)_0.$$

Разлагая разность

$$\frac{\xi - x_0 - h}{r_1^3} - \frac{\xi - x_0}{r_0^3},$$

в которой

$$r_1^2 = (\xi - x_0 - h)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2,$$

получаем для нее

$$h\left\{\frac{3(\xi - x_0)^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3}\right\} + \frac{h^2}{2}\left\{\frac{15(\xi - x_1)^3}{r'^7} - \frac{9(\xi - x_1)}{r'^5}\right\},$$

где

$$r'^2 = (\xi - x_0 - \theta h)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2, \quad x_1 = x_0 + \theta h,$$

откуда заключаем, что

$$\left|\frac{U''(x_0 + h) - U''(x_0)}{h} - \left(\frac{\partial U''}{\partial x}\right)_0\right| < \frac{h}{2}\int |K| \cdot \frac{24}{\delta^4}\, d\zeta\, d\eta\, d\xi,$$

так как точка (x_1, y_0, z_0), находясь внутри сферы радиуса δ, описанной около точки M_0, более чем на δ удалена от границы области интегрирования. В ограниченности интеграла в правой части последнего неравенства можно убедиться, рассуждая как выше.

Из написанного неравенства вытекает, что

$$\text{пред}\, \frac{U''(x_0 + h) - U''(x_0)}{h} = \left(\frac{\partial U''}{\partial x}\right)_0, \text{ при } h = 0,$$

т. е., что производная у U'' существует и равна интегралу (17).

Переходя к U', обозначим через K_0 значение K в точке M_0 и положим

$$U' = K_0 \int\limits_{(2\delta)} \frac{\xi - x}{r^3}\, d\zeta\, d\eta\, d\xi + \int\limits_{(2\delta)} (K - K_0) \frac{\xi - x}{r^3}\, d\zeta\, d\eta\, d\xi = U_1' + U_2'.$$

Интеграл U_1' есть произведение K_0 на производную по x от объемного интеграла

$$\int\limits_{(2\delta)} \frac{d\zeta\, d\eta\, d\xi}{r}.$$

Вычисляя его, находим

$$\int\limits_{(2\delta)} \frac{d\zeta\, d\eta\, d\xi}{r} = \int\limits_0^{2\delta} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi}{r} = \frac{2\pi}{\rho_x} \int\limits_0^{2\delta} \int\limits_{|\rho_x - \rho|}^{\rho_x + \rho} \rho\, d\rho\, dr,$$

где сначала выбраны полярные координаты с полюсом в M_0 и с полярной осью, проходящей через точку $M(x, y, z)$; ρ_x обозначает расстояние от точки M_0 до M.

Выполняя интегрирование, находим:

$$\int\limits_{(2\delta)} \frac{d\zeta\, d\eta\, d\xi}{r} = \frac{2\pi}{\rho_x} \int\limits_0^{\rho_x} \int\limits_{\rho_x - \rho}^{\rho_x + \rho} \rho\, d\rho\, dr + \frac{2\pi}{\rho_x} \int\limits_{\rho_x}^{2\delta} \int\limits_{\rho - \rho_x}^{\rho_x + \rho} \rho\, d\rho\, dr = \frac{4\pi}{\rho_x} \int\limits_0^{\rho_x} \rho^2\, d\rho + 4\pi \int\limits_{\rho_x}^{2\delta} \rho\, d\rho =$$

$$= 8\pi\delta^2 - \frac{2\pi}{3} \left\{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\}.$$

Из сказанного ясно, что

$$\left.\frac{\partial U_1'}{\partial x}\right|_{x = x_0} = -\frac{4\pi}{3} K_0.$$

Интеграл U_2' мы разобьем на два: на интеграл по сфере (2δ), без сферы $(2\,|h|)$ и на интеграл по сфере $(2\,|h|)$:

$$U_2' = U_3 + U_4.$$

Займемся сначала интегралом U_4 по сфере $(2\,|h|)$:

$$\left| \frac{U_4(x_0 + h) - U_4(x_0)}{h} \right| = \left| \frac{1}{h} \int\limits_{2\,|h|} (K - K_0) \left\{ \frac{\xi - x_0 - h}{r_1^3} - \frac{\xi - x_0}{r_0^3} \right\} d\zeta\, d\eta\, d\xi \right| <$$

$$< \frac{aN}{|h|} \int\limits_0^{2\,|h|} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda}\, r_0^2 \sin\theta\, dr_0\, d\theta\, d\varphi}{r_1^2} + \frac{aN}{|h|} \int\limits_0^{2\,|h|} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{r_0^{1-\lambda}\, r_0^2 \sin\theta\, dr_0\, d\theta\, d\varphi}{r_0^2}.$$

Второй интеграл равен

$$\frac{4\pi aN}{|h|}\int\limits_0^{2|h|} r_0^{1-\lambda}\,dr_0 = \frac{4\pi aN}{|h|}\cdot\frac{(2|h|)^{2-\lambda}}{2-\lambda} = \frac{4\pi aN\cdot 2^{2-\lambda}}{2-\lambda}\cdot|h|^{1-\lambda}$$

и бесконечно мал при бесконечно малом h.

Выбирая при нахождении первого интеграла полярную ось так, чтобы она проходила через точку $M(x_0+h,\ y_0,\ z_0)$, имеем для первого интеграла:

$$\frac{2\pi aN}{|h|^2}\int\limits_0^{2|h|}\int\limits_{|r_0-|h||}^{r_0+|h|}\frac{r_0^{2-\lambda}\,dr_0\,dr_1}{r_1} = \frac{2\pi aN}{|h|^2}\int\limits_0^{|h|}\int\limits_{|h|-r_0}^{|h|+r_0}\frac{r_0^{2-\lambda}\,dr_0\,dr_1}{r_1}+$$

$$+\frac{2\pi aN}{|h|^2}\int\limits_{|h|}^{2|h|}\int\limits_{r_0-|h|}^{r_0+|h|}\frac{r_0^{2-\lambda}\,dr_0\,dr_1}{r_1} = \frac{2\pi aN}{|h|^2}\int\limits_0^{|h|} r_0^{2-\lambda}\{\log(r_0+|h|)-$$

$$-\log(|h|-r_0)\}\,dr_0+\frac{2\pi aN}{|h|^2}\int\limits_{|h|}^{2|h|} r_0^{2-\lambda}\{\log(r_0+|h|)-\log(r_0-|h|)\}\,dr_0.$$

Для первого из оставшихся интегралов имеем:

$$4\pi aN\int\limits_0^{|h|}\left\{\frac{r_0^{3-\lambda}}{|h|^3}+\frac{1}{3}\,\frac{r_0^{5-\lambda}}{|h|^5}+\cdots\right\}dr_0 =$$

$$= 4\pi aN|h|^{1-\lambda}\left\{\frac{1}{4-\lambda}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{6-\lambda}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{8-\lambda}+\cdots\right\}.$$

Интеграл бесконечно мал при бесконечно малом h.

Для второго интеграла имеем:

$$4\pi aN\int\limits_{|h|}^{2|h|}\left\{\frac{r_0^{1-\lambda}}{|h|}+\frac{1}{3}\,\frac{|h|}{r_0^{1+\lambda}}+\frac{1}{5}\,\frac{|h|^3}{r_0^{3+\lambda}}+\cdots\right\}dr_0 = 4\pi aN\{\varphi(2|h|)-\varphi(|h|)\},$$

где

$$\varphi(r_0) = \frac{1}{2-\lambda}\,\frac{r_0^{2-\lambda}}{|h|}-\frac{1}{3.\lambda}\,\frac{|h|}{r_0^{\lambda}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2+\lambda}\,\frac{|h|^3}{r_0^{2+\lambda}}+\cdots.$$

Так как ряд сходится при $r_0 \geqq |h|$, как $\varphi(|h|)$, так и $\varphi(2|h|)$ бесконечно малы при бесконечно малом h, и интеграл бесконечно мал.

Итак, отношение

$$\frac{U_4(x_0+h)-U_4(x_0)}{h}$$

бесконечно мало при бесконечно малом h.

Остается интеграл U_3. Положим

$$\left(\frac{\partial U_3}{\partial x}\right)_0 = \int\limits_{(2\delta-2|h|)} (K-K_0)\left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5}-\frac{1}{r_0^3}\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

и рассмотрим разность

$$C=\frac{U_3(x_0+h)-U_3(x_0)}{h}-\left(\frac{\partial U_3}{\partial x}\right)_0=$$

$$=\frac{h}{2}\int\limits_{(2\delta-2|h|)}(K-K_0)\left\{\frac{15(\xi-x_1)}{r'^7}-\frac{9(\xi-x_1)}{r'^5}\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Так как r' расстояние от некоторой точки M до точки между M_0 и M_1, то

$$r'>r_0-|h|,$$

и, значит,

$$|C|<4\pi\frac{|h|}{2}aN.24\int\limits_{2|h|}^{2\delta}\frac{r_0^{3-\lambda}\,dr_0}{(r_0-|h|)^4}=24.2\pi|h|aN\int\limits_{2|h|}^{2\delta}\frac{dr_0}{r_0^{1+\lambda}\left\{1-\frac{|h|}{r_0}\right\}^4}=$$

$$=8\pi aN\int\limits_{2|h|}^{2\delta}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)\frac{|h|^{n+1}}{r_0^{n+1+\lambda}}\right\}dr_0=$$

$$=8\pi aN\{\varphi(2\delta)-\varphi(2|h|)\},$$

где

$$\varphi(r_0)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n+\lambda}\cdot\frac{|h|^{n+1}}{r_0^{n+\lambda}};$$

$\varphi(2\delta)$ содержит множителем $|h|$, $\varphi(2|h|)$ вида $a'|h|^{1-\lambda}$, и, значит, C бесконечно мало вместе с $|h|$.

Рассмотрим еще интеграл

$$\int\limits_{(2|h|)}(K-K_0)\left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5}-\frac{1}{r_0^3}\right\}d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Оценивая его, видим, что по абсолютной величине он меньше

$$4\pi aN.4\int_0^{2|h|}\frac{r_0^{3-\lambda}}{r_0^3}\,dr_0 = 16\pi aN(2|h|)^{1-\lambda}$$

и бесконечно мал вместе с h.

Прибавляя этот интеграл к $\left(\frac{\partial U_3}{\partial x}\right)_0$, мы преобразуем его в интеграл по сфере (2δ), изменив на число бесконечно малое.

Собирая вместе все сказанное, получаем, что производная от U в точке M_0 существует и

$$(A)\qquad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} = -\frac{4\pi}{3}K_0 + \int\limits_{(2\delta)}(K-K_0)\left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5}-\frac{1}{r_0^3}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$

$$+\int K\left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5}-\frac{1}{r_0^3}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Последний интеграл распространен по всему пространству, кроме сферы (2δ).

8. Нахождение производной от U по y потребует тех же выкладок с той только разницей, что производную

$$\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5}-\frac{1}{r_0^3}$$

придется заменить производной

$$\frac{3(\xi-x)(\eta-y_0)}{r_0^5},$$

которая, как и рассмотренная, меньше $\frac{4}{r_0^3}$.

Так же выражение

$$\frac{15(\xi-x)^3}{r^7}-\frac{9(\xi-x)}{r^5}$$

придется заменить выражением

$$\frac{15(\xi-x)(\eta-y)^2}{r^7}-\frac{3(\xi-x)}{r^5},$$

так же меньшим $\frac{24}{r^4}$.

Так как только эти последние обстоятельства и имели значение при выкладках, мы можем написать сразу, замечая, что производная от интеграла

$$\int\limits_{(2\delta)} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} = 8\pi\delta^2 - \frac{2\pi}{3}\left\{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right\},$$

взятая раз по x и раз по y, равна нулю:

$$(B) \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} = \int\limits_{(2\delta)} (K - K_0)\frac{3(\xi - x_0)(\eta - y_0)}{r_0^5}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + $$
$$+ \int K \frac{3(\xi - x_0)(\eta - y_0)}{r_0^5}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где последний интеграл распространен по всему пространству без сферы (2δ).

9. *Примечание*. При выводе мы могли бы сферу (2δ) заменить другой областью (D), заключающей точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и не заключающей внутри точек, принадлежащих границам.

Соответственно этому, формулам (A) и (B) можно дать вид:

$$(A_1)\left\{\begin{aligned} &\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} = K_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{(D)}\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}} + \\ &+ \int\limits_{(D)}(K - K_0)\left\{\frac{3(\xi - x_0)^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3}\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta + \int\limits_{(R-D)} K\left\{\frac{3(\xi - x_0)^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3}\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta, \end{aligned}\right.$$

$$(B_1)\left\{\begin{aligned} &\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} = K_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\int\limits_{(D)}\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}} + \\ &+ \int\limits_{(D)}(K - K_0)\,\frac{3(\xi - x_0)(\eta - y_0)}{r_0^5}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \int\limits_{(R-D)} K\frac{3(\xi - x_0)(\eta - y_0)}{r_0^5}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \end{aligned}\right.$$

Значок ($R - D$) указывает, что интегралы взяты по всему пространству без области (D).

10. Положим, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на границе.

Опишем около точки M_0 сферу радиуса d. Границей сфера будет разделена на две области, из которых одна принадлежит к числу областей первых, другая к числу вторых.

Обозначим, чтобы иметь дело с обоими случаями, ту из них, в которой точка M, близкая к M_0 и подлежащая изучению, через d_i, другую через d_e.

Если точка M приближается к M_0, оставаясь в области (d_i), то K стремится к пределу, который мы обозначим через $(K)_i$; если бы точка приближалась к M_0, оставаясь в (d_e), предел, к которому стремилась бы K, мы обозначили через $(K)_e$.

Обозначим через P_e интеграл

$$\int \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r},$$

распространенный по области d_e.

Из доказанного в главе второй вытекает, что производные, вычисленные в точке M:

$$\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 P_e}{\partial x\, \partial y},$$

стремятся к определенным пределам, когда точка M приближается к M_0.

Обозначим эти пределы через

$$\left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\right)_i, \quad \left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x\, \partial y}\right)_i \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\right)_e, \quad \left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x\, \partial y}\right)_e,$$

смотря по тому, в (d_i) точка M или в (d_e).

Введем в рассмотрение числа

$$(A_i)\left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i = &-\frac{4\pi (K)_i}{3} + \int\limits_{(d_i)} (K-(K)_i)\left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3}\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta + \\ &+ ((K)_e-(K)_i)\left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\right)_i + \int\limits_{(d_e)} (K-(K)_e)\left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3}\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta + \\ &+ \int\limits_{(R-d)} K\left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3}\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta, \end{aligned}\right.$$

$$(B_i)\left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_i = &\int\limits_{(d_i)} (K-(K_i))\frac{3(\xi-x_0)(\eta-y_0)}{r_0^5} d\xi\, d\eta\, d\zeta + \\ &+ ((K)_e-(K)_i)\left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x\, \partial y}\right)_i + \int\limits_{d_e} (K-(K)_e)\frac{3(\xi-x_0)(\eta-y_0)}{r_0^5} d\xi\, d\eta\, d\zeta + \\ &+ \int\limits_{(R-d)} K\frac{3(\xi-x_0)(\eta-y_0)}{r_0^5} d\xi\, d\eta\, d\zeta, \end{aligned}\right.$$

понимая под знаком $(R-d)$, что интеграл распространен по всему пространству без сферы (d), а под r_0 — расстояние от M_0 до переменной точки M.

Сходимость встречающихся интегралов не подлежит сомнению, вследствие условия (16) о функции K, по которому

$$\text{для } (d_i):\ |K-(K)_i| < aNr_0^{1-\lambda}, \qquad \text{для } (d_e):\ |K-(K)_e| < aNr_0^{1-\lambda}$$

и потому, что сходимость последних интегралов установлена в параграфе 7-м.

Оценим числа (A_i) и (B_i).

Первое слагаемое в (A_i) по (12) не больше по абсолютной величине

$$\frac{4\pi a}{3}N.$$

Сумма второго и четвертого интегралов в (A_i) и в (B_i) не больше

$$4\pi aN\,.\,4\int_0^d \frac{r_0^{1-\lambda}r_0^2}{r_0^3}\,dr_0 = \frac{16\pi aN}{1-\lambda}d^{1-\lambda}.$$

Так как

$$|(K)_e-(K)_i| < |K|_e + |K|_i < 2aN,$$

то третьи слагаемые в (A_i) и (B_i) не больше числа

$$a'N,$$

где a' некоторое число, не зависящее от выбора точки M_0; коэффициент в этом члене, именно, один из интегралов (3) параграфа 2-го прошлой главы и ограничен.

Чтобы оценить последние слагаемые, разобьем область $(R-d)$ на три части.

Описав около M_0 сферу радиусом D и положив, например, $D>1$, $D>d$, возьмем интегралы сначала по сфере (D). Получим, что они абсолютно меньше

$$4\pi aN\,.\,4\int_d^D \frac{dr_0}{r_0} = 16\pi a_1 N\,|\log d|,$$

где a_1 некоторое число.

Опишем затем около начала координат сферу радиуса R_0, заключающую сферу (D), и возьмем интегралы по этой сфере, без сферы (D), и по остальному пространству.

Интегралы, взятые по сфере (R_0) без сферы (D) меньше

$$\frac{4\pi a N . 4}{D^3} \int_0^{R_0} \rho^2 \, d\rho < \frac{16\pi a N R_0^3}{3}.$$

Интегралы, взятые по остальному пространству, меньше

$$\frac{4\pi a N . 4}{D^3} \int_{R_0}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} < \frac{16\pi a N}{R_0}.$$

Все сказанное показывает, что можно положить:

$$\left|\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i\right| < bN, \quad \left|\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_i\right| < bN,$$

где b некоторое число, значение которого не зависит от положения точки M_0.

11. Возьмем в области (d_i) точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на расстоянии δ от точки M_0 и найдем производные от U по x и по y в точке M_1.

Пользуясь сказанным в параграфе 9-м, выбираем за (D) область (d_i) и, положив, как в главе 2-й:

$$P_i = \int \frac{d\xi \, d\eta \, d\zeta}{r},$$

где интеграл распространен по области (d_i), пишем, обозначая через K_1 значение K в M_1:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_1} = K_1 \left.\frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2}\right|_{M_1} + \int_{(d_i)} (K - K_1) \left\{\frac{3(\xi - x_1)^2}{r_1^5} - \frac{1}{r_1^3}\right\} d\xi \, d\eta \, d\zeta +$$

$$+ \int_{(R-d_i)} K \left\{\frac{3(\xi - x_1)^2}{r_1^5} - \frac{1}{r_1^3}\right\} d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_1} = K_1 \left.\frac{\partial^2 P_i}{\partial x \, \partial y}\right|_{M_1} + \int_{(d_i)} (K - K_1) \frac{3(\xi - x_1)(\eta - y_1)}{r_1^5} d\xi \, d\eta \, d\zeta +$$

$$+ \int_{(R-d_i)} K \frac{3(\xi - x_1)(\eta - y_1)}{r_1^5} d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

понимая под $(R - d_i)$ все пространство без области (d_i), а под r_1 расстояние от точки M_1 до переменной точки M.

Обозначаем через $(R-d)$ все пространство без сферы (d) и замечаем, что

$$(R-d_i)=(R-d)+(d_e).$$

Вследствие этого, последним интегралам можно дать вид:

$$\int\limits_{(R-d_i)} K\left\{\frac{3(\xi-x_1)^2}{r_1^{\,5}}-\frac{1}{r_1^{\,3}}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta=\int\limits_{(R-d)} K\left\{\frac{3(\xi-x_1)^2}{r_1^{\,5}}-\frac{1}{r_1^{\,3}}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$

$$+(K)_e\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\bigg|_{M_1}+\int\limits_{(d_e)}\big(K-(K)\big)_e\left\{\frac{3(\xi-x_1)^2}{r_1^{\,5}}-\frac{1}{r_1^{\,3}}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

преобразовав аналогичным образом и второй из них.

Прибавив к $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_1}$ интеграл

$$K_1\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\bigg|_{M_1}$$

и вычтя его, и поступив аналогично с $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{M_1}$, получим окончательно:

$$(A')\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{M_1}=-\frac{4\pi}{3}K_1+\int\limits_{(d_i)}(K-K_1)\left\{\frac{3(\xi-x_1)^2}{r_1^{\,5}}-\frac{1}{r_1^{\,3}}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta+\\&+\big((K)_e-K_1\big)\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\bigg|_{M_1}+\int\limits_{(d_e)}\big(K-(K)_e\big)\left\{\frac{3(\xi-x_1)^2}{r_1^{\,5}}-\frac{1}{r_1^{\,3}}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta+\\&+\int\limits_{(R-d)}K\left\{\frac{3(\xi-x_1)^2}{r_1^{\,5}}-\frac{1}{r_1^{\,3}}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta,\end{aligned}\right.$$

$$(B')\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial y}\bigg|_{M_1}=\int\limits_{(d_i)}(K-K_1)\frac{3(\xi-x_1)(\eta-y_1)}{r_1^{\,5}}d\xi\,d\eta\,d\zeta+\big((K)_e-K_1\big)\frac{\partial^2 P_e}{\partial x\,\partial y}\bigg|_{M_1}+\\&+\int\limits_{(d_e)}\big(K-(K)_e\big)\frac{3(\xi-x_1)(\eta-y_1)}{r_1^{\,5}}d\xi\,d\eta\,d\zeta+\int\limits_{(R-d)}K\frac{3(\xi-x_1)(\eta-y_1)}{r_1^{\,5}}d\xi\,d\eta\,d\zeta.\end{aligned}\right.$$

Покажем, что (A') и (B'), когда точка M_1 стремится к точке M_0, не выходя из области (d_i), стремятся к пределам, равным (A_i) и (B_i), причем разности между ними и их пределами вида

$$b'\delta^{1-\lambda},$$

где b' некоторое число.

Для доказательства будем сравнивать в формулах (A_i) и (A'), соответственно в (B_i) и (B'), интегралы почленно и докажем, что разности между соответственными членами все вида

(18) $$bN\delta^{1-\lambda}.$$

α) Из формулы (16) непосредственно вытекает, что

$$|K_1-(K)_i|<aN\delta^{1-\lambda},$$

т. е., что разность между первыми слагаемыми в (A_i) и (A') требуемого вида.

β) Переходим к сравнению первых интегралов в формулах (A_i) и (A').

Опишем около точки M_0 сферу радиуса 3δ и возьмем сначала каждый из 4-х интегралов по области, ограниченной границей и поверхностью сферы.

Интегралы в формулах (A_i) и (B_i) каждый меньше

$$4aN\int\frac{r_0^{1-\lambda}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r_0^3}=4\pi\,.\,4aN\int\limits_0^{3\delta}\frac{dr_0}{r_0^{\lambda}}=\frac{16\pi aN}{1-\lambda}(3\delta)^{1-\lambda}.$$

Интегралы в формулах (A') и (B') каждый меньше

$$4aN\int\limits_0^{3\delta}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r_1^{1-\lambda}\,r_0^2\sin\theta\,dr_0\,d\theta\,d\varphi}{r_1^3}=\frac{8\pi aN}{\delta}\int\limits_0^{3\delta}\int\limits_{|r_0-\delta|}^{r_0+\delta}\frac{r_0\,dr_0\,dr_1}{r_1^{1+\lambda}}=$$

$$=\frac{8\pi aN}{\delta}\left\{\int\limits_0^{\delta}\int\limits_{\delta-r_0}^{\delta+r_0}\frac{r_0\,dr_0\,dr_1}{r_1^{1+\lambda}}+\int\limits_{\delta}^{3\delta}\int\limits_{r_0-\delta}^{r_0+\delta}\frac{r_0\,dr_0\,dr_1}{r_1^{1+\lambda}}\right\}=$$

$$=\frac{8\pi aN}{\lambda\delta}\left\{\int\limits_0^{\delta}r_0\left[\frac{1}{(\delta-r_0)^{\lambda}}-\frac{1}{(\delta+r_0)^{\lambda}}\right]dr_0+\int\limits_{\delta}^{3\delta}r_0\left[\frac{1}{(r_0-\delta)^{\lambda}}-\frac{1}{(r_0+\delta)^{\lambda}}\right]dr_0\right\}.$$

Положив

$$(1-x)^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}b_l\,x^l,$$

имеем

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_0^{\delta}r_0\left\{\frac{1}{(\delta-r_0)^{\lambda}}-\frac{1}{(\delta+r_0)^{\lambda}}\right\}dr_0=2\int\limits_0^{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k+1}\frac{r_0^{2k+2}}{\delta^{2k+2+\lambda}}\,dr_0=$$

$$=2\delta^{1-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_{2k+1}}{2k+3}=a'\,\delta^{1-\lambda},$$

$$\frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{3\delta} r_0\left\{\frac{1}{(r_0-\delta)^{\lambda}}-\frac{1}{(r_0+\delta)^{\lambda}}\right\}dr_0 = 2\int_{\delta}^{3\delta}\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}\frac{\delta^{2k}}{r_0^{\,2k+\lambda}}\,dr_0 =$$

$$= 2\delta^{1-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_{2k+1}}{2k+\lambda-1}\left(1-\frac{1}{3^{2k+\lambda-1}}\right) = a''\,\delta^{1-\lambda}.$$

Следовательно, взятые по указанной области, все интегралы вида (18). Переходя к разностям оставшихся частей интегралов, будем писать

$$\{0\}\ \text{вместо}\ \frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^{\,5}}-\frac{1}{r_0^{\,3}}\ \text{или}\ \frac{3(\xi-x_0)(\eta-y_0)}{r_0^{\,5}},$$

$$\{1\}\ \text{вместо}\ \frac{3(\xi-x_1)^2}{r_1^{\,5}}-\frac{1}{r_1^{\,3}}\ \text{или}\ \frac{3(\xi-x_1)(\eta-y_1)}{r_1^{\,5}}.$$

Получим

$$\int\limits_{(d_i-3\delta)}(K-K_1)\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta-\int\limits_{(d_i-3\delta)}(K-(K)_i)\{0\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=$$

$$=((K)_i-K_1)\int\limits_{(d_i-3\delta)}\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+\int\limits_{(d_i-3\delta)}(K-(K)_i)\left[\{1\}-\{0\}\right]d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Прибавим и вычтем из правой части число

$$\int\limits_{(3\delta)_i}\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

обозначая этим знаком значение в точке M_1 производной от интеграла P_i, взятого по части сферы (3δ) внутри (d_i) и вычтем его, умножив предварительно на $((K)_i-K_1)$.

Для удобства положим:

$$-((K)_i-K_1)\int\limits_{(3\delta)_i}\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=-((K)_i-K_1)\int\limits_{(3\delta)}\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+$$

$$+((K)_i-K_1)\int\limits_{(3\delta)_e}\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

и дадим изучаемой разности окончательно вид

$$(19)\qquad ((K)_i - K_1)\int\limits_{(d_i)}\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + ((K)_i - K_1)\,\eta +$$

$$+ ((K)_i - K_1)\int\limits_{(3\delta)_e}\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \int\limits_{(d_i-3\delta)}(K-(K)_i)\,[\{1\}-\{0\}]\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Здесь

$\eta = \frac{4\pi}{3}$ в случае формул (A) и нуль в случае формул (B).

Число

$$\int\limits_{(d_i)}\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \quad \text{равно} \quad \left.\frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2}\right|_{M_1} \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial_2 P_i}{\partial x\,\partial y}\right|_{M_1}$$

и ограничен, так как с приближением M_1 к M_0 стремится к пределу.

Так как

$$|(K)_i - K_1| < aN\delta^{1-\lambda},$$

первые два слагаемые формулы (19) требуемого вида (18).

Множитель следующего слагаемого равен

$$(20)\qquad \int\frac{\cos Nx\cos r_1 x}{r_1^{\,2}}\,d\sigma \quad \text{или} \quad \int\frac{\cos Nx\cos r_1 y}{r_1^{\,2}}\,d\sigma,$$

где интегрирование распространено частью по границе внутри сферы радиуса 3δ, частью по вырезке из поверхности сферы.

Так как расстояние точки M_1 от M_0 меньше половины 3δ, половины радиуса полусферы, то по сказанному в параграфе 21-м главы 2-ой, они ограничены, и, значит, третьи слагаемые формулы (19) требуемого вида (18).

Переходим к последнему слагаемому.

Имеем, выполняя подробнее выкладки для формул (A),

$$\{1\}-\{0\} = (x_1 - x_0)\left.\frac{\partial^3\frac{1}{r}}{\partial x^3}\right|' + (y_1 - y_0)\left.\frac{\partial^3\frac{1}{r}}{\partial x^2\,\partial y}\right|' + (z_1 - z_0)\left.\frac{\partial^3\frac{1}{r}}{\partial x^2\,\partial z}\right|',$$

где производные вычислены в точке M' между M_0 и M_1.

Так как третьи производные от $\frac{1}{r}$ все меньше $\frac{24}{r^4}$, и расстояние от точки M' до точки внутри области интегрирования больше $r_0 - \delta$, имеем неравенство:

$$|\{1\}-\{0\}| < \frac{\sqrt{3}\,\delta\cdot 24}{(r_0-\delta)^4}.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{(d_i-3\delta)}(K-(K)_i)\,[\{1\}-\{0\}]\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\right| < 24\cdot\sqrt{3}\;4\pi aN\delta\int\limits_{3\delta}^{d}\frac{r_0^{\,1-\lambda}\,r_0^{\,2}\,dr_0}{(r_0-\delta)^4}=$$

$$=24\cdot\sqrt{3}\cdot 4\pi aN\delta\int\limits_{3\delta}^{d}\frac{1}{r_0^{\,1+\lambda}}\frac{dr_0}{\left(1-\frac{\delta}{r_0}\right)^4}=24\cdot\sqrt{3}\cdot 4\pi aN\delta\int\limits_{3\delta}^{d}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,\frac{\delta^k}{r_0^{\,k+1+\lambda}}\,dr_0=$$

$$=24\cdot\sqrt{3}\cdot 4\pi aN\delta\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+\lambda}\,\frac{1}{(3\delta)^\lambda}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+\lambda}\,\frac{\delta^k}{d^{k+\lambda}}\right\}=a'N\delta^{1-\lambda}.$$

Здесь

$$\frac{1}{(1-x)^4}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k.$$

Итак, разности между первыми интегралами в формулах (A_i), (B_i) и (A'), (B') вида (18).

γ) Переходя к третьим слагаемым, перепишем разность их [для формул (A) для примера] так:

$$((K)_e-(K)_i)\left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\right)_i-((K)_e-K_1)\left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\right)_1=(K_1-(K)_i)\left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\right)_i+$$

$$+((K)_e-K_1)\left\{\left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\right)_i-\left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\right)_1\right\}.$$

В первом слагаемом первый множитель вида (18), второй ограничен по сказанному в главе 2-й; во втором слагаемом

$$|(K_e)-K_1|<|(K)_e|+|K_1|<2aN$$

и, по сказанному в главе 2-й:

$$\left|\left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\right)_i-\left(\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\right)_1\right|<a\delta^{1-\lambda}.$$

Итак, разность между третьими слагаемыми требуемого вида (18).

δ) Переходим к разности между четвертыми слагаемыми.

Возьмем все четыре стоящие на четвертых местах интегралы внутри сферы радиуса 3δ, описанной около точки M_0.

Занимаемся сначала интегралами, входящими в формулы (A') и (B').

Опишем около M_1 сферу радиуса δ; если M_1 не на нормали к границе в точке M_0, внутри сферы будут точки поверхности и среди них точка M_2 такая, что M_1 на нормали к границе в M_2.

Положим, δ_1 расстояние от M_1 до M_2, δ_2 расстояние от M_0 до M_2,

$$\delta_1 \leqq \delta, \quad \delta_2 < 2\delta$$

Опишем около M_1 две сферы: сферу радиуса δ_1 и сферу радиуса 4δ (черт. 19).

Ранее описанная около M_0 сфера радиуса 3δ целиком заключается внутри последней.

Обозначим через $(K)_{e'}$, значение K в точке M_2 со стороны d_e.

Пользуясь введенными выше обозначениями, пишем:

$$\int\limits_{(3\delta)_e} (K-(K)_e)\,\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \int\limits_{(3d)_e} (K-(K)_{e'})\,\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$

$$+\left[(K)_{e'}-(K)_e\right]\int\limits_{(3\delta)_e}\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Первый из интегралов по абсолютной величине меньше интеграла, взятого между сферами радиусов δ_1 и 4δ, описанными около точки M_1:

$$4aN\int\limits_{\delta_1}^{4\delta}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{r_2^{1-\lambda}\sin\theta\,dr_1\,d\theta\,d\varphi}{r_1} = \frac{8\pi aN}{\delta_1}\int\limits_{\delta_1}^{4\delta}\int\limits_{r_1-\delta_1}^{r_1+\delta_1}\frac{r_2^{2-\lambda}\,dr_1\,dr_2}{r_1^2} =$$

$$= \frac{8\pi aN}{\delta_1(3-\lambda)}\int\limits_{\delta_1}^{4\delta}\frac{1}{r_1^2}\left[(r_1+\delta_1)^{3-\lambda}-(r_1-\delta_1)^{3-\lambda}\right]dr_1 =$$

$$= \frac{8\pi aN}{3-\lambda}\int\limits_{\delta_1}^{4\delta}\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}\frac{\delta_1^{2k}}{r_1^{2k+\lambda}}\,dr_1 =$$

$$= \frac{8\pi aN}{3-\lambda}\left\{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_{2k+1}}{2k-1+\lambda}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{2k}\frac{1}{4^{2k-1+\lambda}}\right)\delta^{1-\lambda}-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_{2k+1}}{2k-1+\lambda}\right)\delta_1^{1-\lambda}\right\} =$$

$$= bN\delta^{1-\lambda}.$$

Здесь

$$(1+x)^{3-\lambda} = \sum_{e=0}^{\infty} b_e x^e,$$

и вместо θ нами введен при интегрировании r_2 по формуле

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + \delta_1^2 - 2r_1\,\delta_1 \cos\theta}.$$

Обращаемся ко второму интегралу. В нем

$$|(K)_{e'} - (K)_e| < aN\delta_2^{1-\lambda} < aN(2\delta)^{1-\lambda};$$

что же касается второго множителя, то мы уже установили, что он ограничен.

Четвертые слагаемые формул (A_i) и (B_i), взятые по сфере (3δ) с центром в M_0, абсолютно меньше

$$4aN\int\limits_{(3\delta)_e}\frac{r_0^{1-\lambda}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r_0^3} < 16\pi aN\int\limits_0^{3\delta}\frac{dr_0}{r_0^\lambda} = \frac{16\pi aN}{1-\lambda}(3\delta)^{1-\lambda}.$$

Итак, взяв интегралы на четвертых местах по сфере радиуса 3δ около M_0, мы получим числа (18).

Изучаем теперь разности между четвертыми интегралами, взятыми по остальной области.

Имеем для разностей значение

$$\int\limits_{(d_e-3\delta)}(K-(K)_e)\,[\{1\}-\{0\}]\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

и интеграл абсолютно меньше интеграла

$$24\sqrt{3}\cdot 4\pi aN\delta\int\limits_{3\delta}^{d_0}\frac{r_0^{1-\lambda}\,r_0^2\,dr_0}{(r_0-\delta)^4},$$

уже изученного в случае (β).

ε) Остается разность между последними интегралами

$$\int\limits_{(R-d)}K[\{1\}-\{0\}]\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Описав около точки M_0 сферу радиуса D, положив скажем $D > d_0$, $D - \frac{d_0}{2} > 1$, имеем, что интеграл по сфере (D) абсолютно меньше

$$24\cdot 4\pi aN\delta\int\limits_d^D\frac{r_0^2\,dr_0}{(r_0-\delta)^4} =$$

$$= -24\cdot 4\pi aN\delta\left\{\frac{1}{3}\frac{\delta^2}{(r_0-\delta)^3}\Big]_d^D + \frac{\delta}{(r_0-\delta)^2}\Big]_d^D + \frac{1}{r_0-\delta}\Big]_d^D\right\} < \frac{bN\delta}{d_0} < a'N\delta,$$

если считать, что $\delta < \frac{d_0}{2}$; a' некоторое число.

Далее, описав около начала координат две сферы радиуса R_0 и R, берем интеграл по сфере (R_0) без сферы (D) и по области между сферами (R) и (R_0).

Первый абсолютно меньше

$$\frac{24\cdot 4\pi a N\delta}{\left(D-\frac{d}{2}\right)^4}\int\limits_0^{R_0}\rho^3 d\rho = \frac{24\cdot 4\pi a N\delta}{\left(D-\frac{d}{2}\right)^4}\cdot\frac{1}{3}R_0^3 < bN\delta.$$

Второй, при $R=\infty$, абсолютно меньше

$$\frac{24\cdot 4\pi a N\delta}{\left(D-\frac{d}{2}\right)^4}\int\limits_{R_0}^{R}\frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{24\cdot 4\pi a N\delta}{\left(D-\frac{d}{2}\right)^4}\cdot\frac{1}{R_0} < bN\delta.$$

Итак последняя разность вида $bN\delta$, а вся разность вида $bN\delta^{1-\lambda}$, что и требовалось доказать.

12. Обозначим буквой S одну из производных от одной из функции (3).

В параграфе 10-м мы видели, что когда точка $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ находится на одной из границ, то

$$(S) < bN,$$

где b число, независящее от положения точки M_0.

Если мы опишем около какой-нибудь точки M_0 сферу радиуса $\frac{d}{2}$, то может случиться одно из двух: или внутри сферы будут точки одной из границ пространства (Ξ) или их не будет.

В первом случае на одной из границ будет точка M_1, расстояние которой от M_0 меньше $\frac{d}{2}$ и, значит, по доказанному в прошлом параграфе, разность между значениями производной в точках M_0 и M_1 будет меньше числа вида

$$aN\left(\frac{d}{2}\right)^{1-\lambda},$$

где a не зависит от положения точки M_1. Значит, значение S в M_0 будет меньше числа вида

$$b'N,$$

где b' не зависит от положения точки M_0.

Положим теперь, что внутри описанной около M_0 сферы радиуса $\frac{d}{2}$ нет точек границы.

Оценим значение S в точке M_0.

Имеем, беря за область (D) указанную сферу радиуса $\frac{d}{2}$:

$$S = K_0\eta + \int\limits_{\left(\frac{d}{2}\right)} (K - K_0)\{0\}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \int\limits_{\left(R - \frac{d}{2}\right)} K\{0\}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где

$$\eta = -\frac{4\pi}{3} \text{ или } \eta = 0.$$

Первое слагаемое меньше aN или меньше $\frac{aN}{\rho_0^4}$, где ρ_0 расстояние от начала координат до точки M_0.

Второе слагаемое абсолютно меньше

$$4aN \int\limits_{\frac{d}{2}} \frac{r_0^{1-\lambda}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r_0^3} = 16\pi aN \int\limits_0^{\frac{d}{2}} \frac{dr_0}{r_0^\lambda} = \frac{16\pi aN}{1-\lambda}\left(\frac{d}{2}\right)^{1-\lambda} < bN$$

или

$$\frac{4aN}{\rho_0^4} \int\limits_{\frac{d}{2}} \frac{r_0^{1-\lambda}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r_0^3} < \frac{bN}{\rho_0^4}.$$

Итак, как сумма первых двух слагаемых, так и произведение ее на ρ_0^3 вида bN.

Оцениваем третье слагаемое. Описываем около точки M_0 сферу достаточно большого радиуса D, положив $D > 1$, и берем сначала интеграл по сфере (D) без сферы $\left(\frac{d}{2}\right)$.

Имеем для этой сферы (черт. 20)

$$|K| < aN,\ |K| < \frac{aN}{\rho^4} < \frac{aN}{(\rho_0 - D)^4},$$

и интеграл меньше

$$4aN \cdot 4\pi \int\limits_{\frac{d}{2}}^{D} \frac{r_0^2\, dr_0}{r_0^3} = 16\pi aN \left\{\log D - \log\frac{d}{2}\right\} < bN$$

или меньше

$$\frac{4aN \cdot 4\pi}{(\rho_0 - D)^4} \int\limits_{\frac{d}{2}}^{D} \frac{dr_0}{r_0} < \frac{bN}{(\rho_0 - D)^4},$$

откуда ясно, что как сам интеграл, так, при достаточно большом ρ_0, и его произведение на ρ_0^3 меньше bN.

Опишем около начала координат сферу радиуса R_0 и сферу радиуса R и берем интеграл по сфере (R_0) и по области между сферами (R_0) и (R), исключая сферу (D).

Если сфера (D) внутри сферы (R_0), т.-е. если о ρ_0 сделано предположение

$$\rho_0 < R_0,$$

то, повторив рассуждения конца параграфа 10-го, убедимся, что оставшийся интеграл меньше числа bN.

Сосредоточим, поэтому, свое внимание на случае, когда сфера (D) в области между сферами (R_0) и (R).

Интеграл по сфере (R_0) абсолютно меньше

$$4aN\int_0^{R_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi}{r_0^3}=\frac{8\pi aN}{\rho_0}\int_0^{R_0}\int_{\rho_0-\rho}^{\rho_0+\rho}\frac{\rho d\rho dr_0}{r_0^2}=$$

$$=\frac{8\pi aN}{\rho_0}\int_0^{R_0}\rho\left\{\frac{1}{\rho_0-\rho}-\frac{1}{\rho_0+\rho}\right\}d\rho=16\pi aN\int_0^{R_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^{2k+2}}{\rho_0^{2k+3}}\,d\rho=$$

$$=16\pi aN\,\frac{R_0^3}{\rho_0^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+3}\cdot\frac{R_0^{2k}}{\rho_0^{2k}}.$$

Здесь

$$\frac{R_0}{\rho_0}<\frac{R_0}{R_0+D},$$

а потому как сам интеграл, так и его произведение на ρ_0^3 меньше числа bN.

Интеграл по области между сферами меньше

$$4aN\int\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\rho^4 r_0^3}=\frac{8\pi aN}{\rho_0}\left\{\int_{R_0}^{\rho_0-D}\int_{\rho_0-\rho}^{\rho_0+\rho}\frac{d\rho\,dr_0}{\rho^3 r_0^2}+\int_{\rho_0-D}^{\rho_0+D}\int_{D}^{\rho_0+\rho}\frac{d\rho\,dr_0}{\rho^3 r_0^2}+\int_{\rho_0+D}^{R}\int_{\rho-\rho_0}^{\rho+\rho_0}\frac{d\rho\,dr_0}{\rho^3 r_0^2}\right\}=$$

$$=\frac{8\pi aN}{\rho_0}\left\{\int_{R_0}^{\rho_0-D}\frac{1}{\rho^3}\left\{\frac{1}{\rho_0-\rho}-\frac{1}{\rho_0+\rho}\right\}d\rho+\int_{\rho_0-D}^{\rho_0+D}\frac{1}{\rho^3}\left\{\frac{1}{D}-\frac{1}{\rho_0+\rho}\right\}d\rho+\right.$$

$$\left.+\int_{\rho_0+D}^{R}\frac{1}{\rho^3}\left\{\frac{1}{\rho-\rho_0}-\frac{1}{\rho+\rho_0}\right\}d\rho\cdot\right.$$

Оцениваем три интеграла порознь.

$$\frac{8\pi a N}{\rho_0}\int\limits_{R_0}^{\rho_0-D}\frac{1}{\rho^3}\left\{\frac{1}{\rho_0-\rho}-\frac{1}{\rho_0+\rho}\right\}d\rho=16\pi a N\int\limits_{R_0}^{\rho_0-D}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^{2k-2}}{\rho_0^{2k+3}}\,d\rho=$$

$$=\frac{16\pi a N}{\rho_0^3}\left\{\frac{1}{R_0}-\frac{1}{\rho_0-D}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\left\{\frac{(\rho_0-D)^{2k-1}}{\rho_0^{2k}}-\frac{R_0^{2k-1}}{\rho_0^{2k}}\right\}\right\}<$$

$$<\frac{16\pi a N}{\rho_0^3}\left\{\frac{1}{R_0}+\frac{1}{2\rho_0}\log\left(\frac{2\rho_0-D}{D}\right)\right\},$$

т.-е. как сам интеграл, так и его произведение на ρ_0^3 меньше числа вида bN.

Переходим ко второму интегралу. Так как

$$\rho_0+\rho<2\rho_0+D,\qquad -\frac{1}{\rho_0+\rho}<-\frac{1}{2\rho_0+D},$$

то

$$\frac{8\pi a N}{\rho_0}\int\limits_{\rho_0-D}^{\rho_0+D}\frac{1}{\rho^3}\left\{\frac{1}{D}-\frac{1}{\rho_0+\rho}\right\}d\rho<\frac{8\pi a N}{\rho_0}\cdot\frac{2\rho_0}{D\,(2\rho_0+D)}\int\limits_{\rho_0-D}^{\rho_0+D}\frac{d\rho}{\rho^3}=$$

$$=\frac{16\pi a N}{(2\rho_0+D)\,D}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(\rho_0-D)^2}-\frac{1}{(\rho_0+D)^2}\right\}=\frac{32\pi a N}{2\rho_0+D}\,\frac{\rho_0}{(\rho_0^2-D^2)^2},$$

и как сам интеграл, так и его произведение на ρ_0^3 меньше числа вида bN.

Оценивая последний интеграл, видим:

$$\frac{8\pi a N}{\rho_0}\int\limits_{\rho_0+D}^{R}\frac{1}{\rho^3}\left\{\frac{1}{\rho-\rho_0}-\frac{1}{\rho+\rho_0}\right\}d\rho=16\pi a N\int\limits_{\rho_0+D}^{R}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho_0^{2k}}{\rho^{2k+5}}\,d\rho=$$

$$16\pi a N\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+4}\,\frac{\rho_0^{2k}}{(\rho_0+D)^{2k+4}},$$

и как сам интеграл, так и его произведение на ρ_0^3 меньше числа вида bN.

Итак, во всякой точке M_0:

$$|S|<bN,\ \ \rho_0^3\,|S|<bN.$$

13. Положим, что дана производная S по x, y или z от одной из функций (3) и что имеются две точки M_0 и M_1 по одну сторону от границ, расстояние δ между которыми меньше d.

Покажем, что, если S_{M_0} и S_{M_1} значения S в этих точках, то

$$|S_{M_0} - S_{M_1}| < aN\delta^{1-\lambda}, \quad \rho_0^3\, |S_{M_0} - S_{M_1}| < aN\delta^{1-\lambda},$$

где ρ_0 расстояние точки M_0 от начала координат, а a число, не зависящее от выбора точек M_0 и M_1 и производной S.

Мы будем предполагать, что

$$\delta < \frac{d}{8}. \tag{21}$$

Если бы это неравенство не было соблюдено, то было бы

$$|S_{M_0} - S_{M_1}| < |S_{M_0}| + |S_{M_1}| < 2bN = \frac{\delta^{1-\lambda}\, 2bN}{\delta^{1-\lambda}} < \frac{\delta^{1-\lambda}\, 2bN}{\left(\frac{d}{8}\right)^{1-\lambda}} = aN\delta^{1-\lambda}.$$

Следовательно, достаточно доказать теорему при указанном предположении (21) о δ.

Опишем около M_0 сферу радиуса 3δ.

Может случиться, что внутри сферы есть точки границы; может случиться, что внутри сферы нет точек границы.

Рассмотрим первое предположение.

Возьмем на границе внутри сферы точку M^0, и пусть δ_1 и δ_2 расстояния ее от M_0 и M_1. Имеем

$$\delta_1 < 3\delta, \quad \delta_2 < \delta_1 + \delta < 4\delta.$$

Как δ_1, так и δ_2 меньше $\frac{d}{2}$; значит, на основании доказанного в параграфе 11-м, если $(S)_i$ значение производной в точке M^0 со стороны точки M_0:

$$|S_{M_0} - S_{M_1}| = |(S_{M_0} - S_{M^0}) + (S_{M^0} - S_{M_1})| < |S_{M_0} - S_{M^0}| + |S_{M^0} - S_{M_1}| <$$
$$< bN\delta_1^{1-\lambda} + bN\delta_2^{1-\lambda} < aN\delta^{1-\lambda}.$$

Доказав теорему при сделанном первом предположении, переходим ко второму предположению.

Опишем около точки M_0 сферу радиуса $\frac{d}{3}$. Может случиться, что внутри этой сферы нет точек границы, и что точки границы есть.

Рассмотрим сначала первое предположение.

В этом случае S_{M_0} и S_{M_1} можно вычислить по формулам параграфа 9-го, выбирая за область (D) построенную сферу $\left(\frac{d}{3}\right)$. Имеем:

$$S_{M_0} = K_0\eta + \int\limits_{\left(\frac{d}{3}\right)} (K - K_0)\{0\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \int\limits_{\left(R - \frac{d}{3}\right)} K\{0\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$S_{M_1} = K_1\eta + \int\limits_{\left(\frac{d}{3}\right)} (K - K_1)\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \int\limits_{\left(R - \frac{d}{3}\right)} K\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

где

$$\text{или } \eta = -\frac{4\pi}{3} \text{ или } \eta = 0.$$

Разность между первыми слагаемыми, вследствие (15), требуемого вида. Занимаемся вторыми.

Прежде всего, берем каждый из интегралов по сфере радиуса 3δ, построенной выше.

Интеграл в S_{M_0} абсолютно меньше

$$4aN_1\,4\pi\int\limits_0^{3\delta}\frac{r_0^{1-\lambda}\,r_0^2\,dr_0}{r_0^3} = \frac{4aN.4\pi}{1-\lambda}(3\delta)^{1-\lambda}$$

или меньше

$$\frac{4aN.4\pi}{(1-\lambda)\,\rho_0^4}(3\delta)^{1-\lambda},$$

смотря по тому, которое из неравенств (15) мы выбрали.

Интеграл в S_{M_1} абсолютно меньше интеграла

$$\int |K - K_1|\frac{4}{r_1^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

взятого по сфере радиуса 4δ, описанной около точки M_1, так как эта сфера заключает рассматриваемую сферу (3δ). Значит, он абсолютно меньше

$$4aN.4\pi\int\limits_0^{4\delta}\frac{dr_1}{r_1^{\lambda}} = \frac{4aN.4\pi}{1-\lambda}(4\delta)^{1-\lambda} \text{ или } < \frac{4aN.4\pi}{(1-\lambda)\left(\rho_0 - \frac{d}{8}\right)^4}(4\delta)^{1-\lambda},$$

так как из (15) имеем

$$|K - K_1| < \frac{aNr_1^{1-\lambda}}{\rho_1^4} < \frac{aNr_1^{1-\lambda}}{(\rho_0 - \delta)^4} < \frac{aNr_1^{1-\lambda}}{\left(\rho_0 - \frac{d}{8}\right)^4},$$

где ρ_1 расстояние от начала координат до точки M_1.

Итак, как оба рассматриваемые интеграла, так и произведения их на ρ_0^3, при достаточно большом ρ_0, вида

(22) $$a' N\delta^{1-\lambda}.$$

Остается рассмотреть разность

$$\int\limits_{\left(\frac{d}{8} - 3\delta\right)} (K - K_0)\{0\}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta - \int\limits_{\left(\frac{d}{8} - 3\delta\right)} (K - K_1)\{1\}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Она равна

$$(K_1 - K_0) \int\limits_{\left(\frac{d}{8} - 3\delta\right)} \{1\}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \int\limits_{\left(\frac{d}{8} - 3\delta\right)} (K - K_0)\left[\{0\} - \{1\}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

В первом слагаемом множитель $K_1 - K_0$ на основании (15), конечно, требуемого вида; но

$$\int\limits_{\left(\frac{d}{8} - 3\delta\right)} \{1\}\, d\xi\, \partial\eta\, d\zeta$$

равен разности между двумя одинаковыми производными второго порядка во внутренней точке от

$$\int\limits_{\left(\frac{d}{8}\right)} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} \quad \text{и} \quad \int\limits_{(3\delta)} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}$$

и потому равен нулю; следовательно, первое слагаемое нуль.

Второй интеграл абсолютно меньше

$$24aN.4\pi\delta \int\limits_{3\delta}^{\frac{d}{8}} \frac{r_0^{3-\lambda}\, dr_0}{(r_0 - \delta)^4} = 24aN.4\pi\delta \int\limits_{3\delta}^{\frac{d}{8}} \frac{dr_0}{r_0^{1+\lambda}\left(1 - \frac{\delta}{r_0}\right)^4},$$

так как мы уже выяснили, что

$$|\{0\}-\{1\}|<\frac{24\delta}{(r_0-\delta)^4}.$$

Если

(23)
$$\frac{1}{(1-x)^4}=\sum c_l x^l,$$

то последний интеграл меньше

$$24aN.4\pi\delta\int_{3\delta}^{\frac{d}{3}}\sum_{l=0}^{\infty}c_l\frac{\delta^l}{r_0^{\,l+1+\lambda}}dr_0=$$

$$=24aN.4\pi\delta\left\{\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{c_l}{l+\lambda}\frac{1}{3^{l+\lambda}}\right)\frac{1}{\delta^\lambda}-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{c_l}{l+\lambda}\frac{\delta^l}{\left(\frac{d}{3}\right)^{l+\lambda}}\right\},$$

т.-е. меньше числа вида (22).

Взяв другую из формул (15), мы получили бы, что он меньше $\frac{b'N}{\rho_0^4}\delta^{1-\lambda}$.

Рассмотрим еще разность

$$\int\limits_{d-\frac{d}{3}}K[\{0\}-\{1\}]\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

выделенную из разности последних слагаемых в выражениях S_{M_0} и S_{M_1}.

Написанный интеграл абсолютно меньше

$$24aN.4\pi\delta\int_{\frac{d}{3}}^{d}\frac{r_0^2\,dr_0}{(r_0-\delta)^4}=24aN.4\pi\delta\int_{\frac{d}{3}}^{d}\sum_{l=0}^{\infty}c_l\frac{\delta^l}{r_0^{\,l+2}}dr_0=$$

$$=24aN.4\pi\delta\sum_{l=0}^{\infty}\frac{c_l}{l+1}\left\{\frac{\delta^l}{\left(\frac{d}{3}\right)^{l+1}}-\frac{\delta^l}{d^{l+1}}\right\},$$

откуда ясно, так как соблюдено (21), что он меньше числа вида $bN\delta$.

Замечая, что при

$$|K|<\frac{aN}{\rho^4}$$

имеем в области интегрирования

$$|K| < \frac{aN}{(\rho_0 - d)^4},$$

заключаем, что произведение разности на ρ_0^3 тоже вида $bN\delta$.

Переходим ко второму предположению.

Описав около M_0 сферу радиуса $\frac{d}{3}$, найдем внутри ее точку M^0, ближайшую к M_0 и лежащую на границе. Опишем около M^0 сферу радиуса d. Как M_0, так и M_1 будут внутри сферы. Если δ_0 расстояние M_0 от M^0, а δ_1 расстояние M_1 от M^0, то

$$3\delta < \delta_0 < \frac{d}{3}, \quad \delta_1 < \delta_0 + \delta < \frac{d}{3} + \frac{d}{8} < \frac{d}{2}.$$

Граница делит сферу (d) на две части; ту из них, в которой точки M_0 и M_1, мы обозначим через d_i, другую через d_e.

При построении значений производной S в точках M_0 и M_1 мы возьмем, как в параграфе 11-м, за область (D) область (d_i) и применим формулы (A') и (B') параграфа 11-го, обозначая через $(K)_e$ значение K в точке M^0 со стороны (d_e).

$$(A')\begin{cases} S_{M_0} = -\frac{4\pi}{3}K_0 + \int\limits_{(d_i)} (K - K_0)\{0\}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + ((K)_e - K_0)\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\Big|_{M_0} + \\ \quad + \int\limits_{(d_e)} \big(K - (K)_e\big)\{0\}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \int\limits_{(R-d)} K\{0\}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \end{cases}$$

$$(A'')\begin{cases} S_{M_1} = -\frac{4\pi}{3}K_1 + \int\limits_{(d_i)} (K - K_1)\{1\}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + ((K_e) - K_1)\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\Big|_{M_1} + \\ \quad + \int\limits_{(d_e)} \big(K - (K)_e\big)\{1\}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \int\limits_{(R-d)} K\{1\}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \end{cases}$$

Мы выбрали, чтобы на чем-нибудь остановиться, производную $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$; но от этого выбора зависит существенно только форма первого и третьего слагаемых в (A') и (A''); для производной $\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}$ первые слагаемые надо заменить нулем, а в третьих поставить $\frac{\partial^2 P_e}{\partial x\, \partial y}$.

Сравниваем почленно слагаемые в формулах (A') и (A'').

α) Вследствие формул (15):

$$|K_0 - K_1| < aN\delta^{1-\lambda},$$

и разность между первыми слагаемыми требуемого вида (22).

β) Берем сначала интегралы во вторых слагаемых по сфере радиуса 3δ, описанной около точки M_0. Эти интегралы нами исследованы при разборе первого предположения и оказались по абсолютной величине меньше числа (22).

Остается разность между интегралами по остальной части области (d_i):

$$(24)\left\{\begin{aligned} &\int\limits_{(d_i-3\delta)}(K-K_0)\{0\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta - \int\limits_{(d_i-3\delta)}(K-K_1)\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \\ &= (K_1-K_0)\int\limits_{(d_i-3\delta)}\{1\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \int\limits_{(d_i-3\delta)}(K-K_0)\big[\{0\}-\{1\}\big]\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \end{aligned}\right.$$

В первом слагаемом разность $K_1 - K_0$ требуемого вида.

Второй множитель первого слагаемого есть вторая производная от интеграла

$$(25)\qquad \int\limits_{(d_i-3\delta)}\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r},$$

вычисленная в точке M_1.

Прибавляя к нему и вычитая из него значение второй производной от

$$\int\limits_{(3\delta)}\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}$$

в точке M_1, лежащей внутри сферы (3δ), т.-е. число ограниченное, $-\frac{4\pi}{3}$ или нуль, мы преобразуем интеграл (25) в значение в точке M_1 второй производной от

$$P_i = \int\limits_{(d_i)}\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r},$$

т.-е. в число ограниченное, меньшее некоторого числа b, независящего от положения точки M_1.

Следовательно, первое слагаемое в (24) вида (22).

Второе слагаемое в (24) абсолютно меньше

$$24aN\delta \int\limits_{(d-3\delta)} \frac{r_0^{1-\lambda}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(r_0-\delta)^4} < 24aN\delta \int\limits_{\left(d+\frac{d}{3}-3\delta\right)} \frac{r_0^{3-\lambda}\sin\theta\, dr_0\, d\theta\, d\varphi}{(r_0-\delta)^4} =$$

$$= 24aN.\,4\pi\delta \int\limits_{3\delta}^{d+\frac{d}{3}} \frac{r_0^{3-\lambda}\, dr_0}{(r_0-\delta)^4}.$$

В предпоследнем интеграле интегрирование распространено по сфере радиуса $d+\frac{d}{3}$, описанной около точки M_0; эта сфера охватывает сферу (d).

Интеграл, подобный получившемуся, уже оценен. Применяя разложение (23), имеем:

$$24aN.\,4\pi\delta \int\limits_{3\delta}^{\frac{4}{3}d} \frac{dr_0}{r_0^{1+\lambda}\left(1-\frac{\delta}{r_0}\right)^4} = 24aN.\,4\pi\delta \int\limits_{3\delta}^{\frac{4}{3}d} \sum_{l=0}^{\infty} c_l \frac{\delta^l}{r_0^{l+\lambda+1}}\, dr_0 =$$

$$= 24aN.\,4\pi\delta \left\{\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_l}{l+\lambda}\, \frac{1}{3^{\lambda+l}}\right)\frac{1}{\delta^\lambda} - \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_l}{l+\lambda}\, \frac{\delta^l}{\left(\frac{4}{3}\, d\right)^{l+\lambda}}\right)\right\},$$

и он вида (22).

Итак, разность между вторыми слагаемыми в (A') и (A'') требуемого вида (22).

γ) Переходим к третьим слагаемым. Имеем:

$$\left((K_e)-K_0\right)\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\Big|_{M_0} - \left((K_e)-K_1\right)\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\Big|_{M_1} = (K_1-K_0)\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\Big|_{M_0} +$$

$$+ \left((K_e)-K_1\right)\left\{\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\Big|_{M_0} - \frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2}\Big|_{M_1}\right\}.$$

Первое слагаемое требуемого вида, так как K_1-K_0 требуемого вида, а интегральный множитель, по сказанному в главе 2-й, ограничен.

Первый множитель второго слагаемого меньше

$$|(K)_e| + |K_1| < 2aN;$$

второму множителю посвящены §§ 23—26 главы 2-й, и установлено, что он абсолютно меньше числа вида (22).

Следовательно, разность между третьими слагаемыми в (A') и (A'') требуемого вида.

δ) Переходим к четвертым слагаемым. Вычитая их, получаем

$$\int\limits_{(d_e)} \left(K-(K)_e\right)\left[\{0\}-\{1\}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

интеграл, который, если r_1 расстояние от M^0 (черт. 21), абсолютно меньше

$$24aN\delta \int\limits_{(d-3\delta)} \frac{r_1^{1-\lambda}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(r_0-\delta)^4} < 24aN\delta \int\limits_{\left(\frac{4}{3}d-3\delta\right)} \frac{r_1^{1-\lambda}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(r_0-\delta)^4};$$

в последнем интеграле интегрирование распространено по сфере радиуса $d+\frac{d}{3}$ с центром в M_0.

Но

$$\frac{r_1}{r_0}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad r_1 < \frac{r_0}{|\sin\alpha|} < 2r_0,$$

так как угол α больше угла ω, который, как мы считали, не менее $30°$; при остром α: $\sin\alpha > \frac{1}{2}$, а при тупом α: $r_1 < r_0$.

Итак, последний интеграл меньше

$$24aN.2^{1-\lambda}.4\pi\delta \int\limits_{3\delta}^{\frac{4}{3}d} \frac{r_0^{3-\lambda}\, dr_0}{(r_0-\delta)^4} < aN\delta^{1-\lambda},$$

как показано при разборе случая (β).

Итак, сумма всех первых четырех разностей меньше числа $aN\delta^{1-\lambda}$.

Остается изучить, для обоих предположений, разность интегралов, распространенных по всему пространству вне сферы (d).

Сферу (d) мы строили радиусом d или около точки M_0 или около точки M^0, удаленной от M_0 менее чем на $\frac{d}{3}$. Во всяком случае эта сфера заключает сферу радиуса $\frac{2}{3}d$, построенную около точки M_0 как центра.

Описываем около M_0 сферу радиуса D, где $D > d$, $D - \frac{d}{4} > 1$, и берем разность интегралов сперва по сфере (D). Разность их по абсолютной величине меньше

$$24aN.4\pi\delta \int\limits_{\frac{2}{3}d}^{D} \frac{r_0^2\,dr_0}{(r_0-\delta)^4} = 24aN.4\pi\delta \int\limits_{\frac{2}{3}d}^{D} \sum_{l=0}^{\infty} c_l \frac{\delta^l}{r_0^{l+2}}\,dr_0 =$$

$$= 24aN.4\pi\delta \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_l}{l+1} \left\{ \frac{\delta^l}{\left(\frac{2}{3}d\right)^{l+1}} - \frac{\delta^l}{D^{l+1}} \right\},$$

т.-е. меньше числа вида $bN\delta$.

При оценке K вместо первой из формул (12), мы могли бы взять

$$|K| < \frac{aN}{\rho^4} < \frac{aN}{(\rho_0 - D)^4}.$$

где ρ_0, как и прежде, расстояние M_0 от начала координат.

Мы получили бы, что, при достаточно больших ρ_0, разность интегралов меньше числа $\frac{bN\delta}{\rho_0^3}$.

Опишем около начала координат две сферы: сферу радиуса R_0 и радиуса R.

Сфера (D) может заключаться внутри сферы (R_0), может не заключаться внутри ее.

В первом случае разность между интегралами, взятыми по сфере (R_0), меньше

$$\frac{24aN.4\pi\delta}{\left(D - \frac{d}{8}\right)^4} \int\limits_0^{R_0} \rho^2\,d\rho < \frac{24aN.4\pi\delta\,R_0^3}{3} < bN\delta;$$

разность между интегралами, взятыми по области между сферами (R_0) и (R) меньше

$$\frac{24aN.4\pi\delta}{\left(D - \frac{d}{8}\right)^4} \int\limits_{R_0}^{R} \frac{d\rho}{\rho^2} < 24aN.4\pi\delta.\frac{1}{R_0} < bN\delta, \text{ считая } R = \infty.$$

Полагаем теперь, что сфера (D) вне сферы (R_0); в этом случае ρ_0 можно увеличивать беспредельно.

Интеграл по сфере (R_0) абсолютно меньше

$$24aN\delta\int_0^{R_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi}{(r_0-\delta)^4}=\frac{24aN\delta.2\pi}{\rho_0}\int_0^{R_0}\int_{\rho_0-\rho}^{\rho_0+\rho}\frac{\rho r_0\,d\rho\,dr_0}{(r_0-\delta)^4}=$$

$$=\frac{24aN.2\pi\delta}{\rho_0}\int_0^{R_0}\int_{\rho_0-\rho}^{\rho_0+\rho}\rho\sum_{l=0}^{\infty}c_l\frac{\delta^l}{r_0^{l+3}}\,d\rho\,dr_0=$$

$$=\frac{24aN.2\pi}{\rho_0}\delta\int_0^{R_0}\rho\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{c_l}{l+2}\cdot\frac{\delta^l}{(\rho_0-\rho)^{l+2}}-\frac{c_l}{l+2}\cdot\frac{\delta^l}{(\rho_0+\rho)^{l+2}}\right)d\rho=$$

$$=\frac{24aN.2\pi}{\rho_0^3}\delta\int_0^{R_0}\rho\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{c_l}{l+2}\cdot\frac{1}{\rho_0^l}\cdot\frac{\delta^l}{\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{l+2}}-\frac{c_l}{l+2}\cdot\frac{1}{\rho_0^l}\cdot\frac{\delta^l}{\left(1+\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{l+2}}\right)d\rho.$$

Функция под знаком последнего интеграла меньше

$$\rho\sum_{l=0}^{\infty}\frac{c_l}{l+2}\frac{1}{\rho_0^l}\cdot\frac{\delta^l}{\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{l+2}}<\frac{\rho}{\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}c_l\frac{\delta^l}{(\rho_0-\rho)^l}=$$

$$=\frac{\rho}{\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}\frac{1}{\left(1-\frac{\delta}{\rho_0-\rho}\right)^4}<\frac{\rho}{\left(1-\frac{R_0}{\rho_0}\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\delta}{\rho_0-R_0}\right)^4}.$$

Значит, интеграл меньше

$$\frac{24aN.2\pi.\delta}{\rho_0^3}\,\frac{R_0^2}{2\left(1-\frac{R_0}{\rho_0}\right)^2\left(1-\frac{\delta}{\rho_0-R_0}\right)^4}<\frac{a'N\delta}{\rho_0^3}.$$

Интеграл по области между сферами (R_0) и (R) абсолютно меньше

$$24aN\delta\int_{((R-R_0)-D)}\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\rho^4.(r_0-\delta)^4}=$$

$$=\frac{24aN.2\pi\delta}{\rho_0}\left\{\int_{R_0}^{\rho_0-D}\int_{\rho_0-\rho}^{\rho_0+\rho}\frac{r_0\,d\rho\,dr_0}{\rho^3(r_0-\delta)^4}+\int_{\rho_0-D}^{\rho_0+D}\int_{D}^{\rho_0+\rho}\frac{r_0\,d\rho\,dr_0}{\rho^3(r_0-\delta)^4}+\int_{\rho_0+D}^{R}\int_{\rho-\rho_0}^{\rho+\rho_0}\frac{r_0\,d\rho\,dr_0}{\rho^3(r_0-\delta)^4}\right\}.$$

Рассматриваем интегралы порознь. Для первого имеем:

$$\frac{a' N\delta}{\rho_0}\int\limits_{R_0}^{\rho_0-D}\int\limits_{\rho_0-\rho}^{\rho_0+\rho}\frac{1}{\rho^3}\sum_{l=0}^{\infty} c_l\,\frac{\delta^l}{r_0^{\,l+3}}\,d\rho\,dr_0 =$$

$$=\frac{a' N\delta}{\rho_0}\int\limits_{R_0}^{\rho_0-D}\frac{1}{\rho^3}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{c_l}{l+2}\,\frac{\delta^l}{(\rho_0-\rho)^{l+2}}-\frac{c_l}{l+2}\,\frac{\delta^l}{(\rho_0+\rho)^{l+2}}\right)d\rho =$$

$$=\frac{a' N\delta}{\rho_0^{\,3}}\int\limits_{R_0}^{\rho_0-D}\frac{1}{\rho^3}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{c_l}{l+2}\,\frac{1}{\rho_0^{\,l}}\cdot\frac{\delta^l}{\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{l+2}}-\frac{c_l}{l+2}\,\frac{1}{\rho_0^{\,l}}\cdot\frac{\delta^l}{\left(1+\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{l+2}}\right)d\rho.$$

Функция под знаком интеграла меньше

$$\frac{1}{\rho^3}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{c_l}{l+2}\cdot\frac{1}{\rho_0^{\,l}}\,\frac{\delta^l}{\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{l+2}} < \frac{1}{\rho^3}\sum_{l=0}^{\infty}c_l\,\frac{1}{\rho_0^{\,l}}\cdot\frac{\delta^l}{\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{l+2}} =$$

$$=\frac{1}{\rho^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\delta}{\rho_0-\rho}\right)^4} < \cdot\frac{1}{\rho^3}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}\,\frac{1}{\left(1-\frac{d}{D}\right)^4}.$$

Значит, интеграл меньше

$$\frac{a' N\delta}{\rho_0^{\,3}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{d}{D}\right)^4}\int\limits_{R_0}^{\rho_0-D}\frac{1}{\rho^3}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}\,d\rho=\frac{a' N\delta}{\rho_0^{\,3}}\,\frac{1}{\left(1-\frac{d}{D}\right)^4}\int\limits_{R_0}^{\rho_0-D}\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\,\frac{\rho^{l-3}}{\rho_0^{\,l}}\,d\rho =$$

$$=\frac{a' N\delta}{\rho_0^{\,3}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{d}{D}\right)^4}\left\{-\frac{1}{2\rho^2}-\frac{2}{\rho\rho_0}+3\,\frac{\log\rho}{\rho_0^{\,2}}+\sum_{l=3}^{\infty}\frac{l+1}{l-2}\cdot\frac{\rho^{l-2}}{\rho_0^{\,l}}\right\}_{R_0}^{\rho_0-D}.$$

Отсюда ясно, что, при больших ρ_0, интеграл меньше числа вида $\frac{a'' N\delta}{\rho_0^{\,3}}$. Для второго интеграла имеем:

$$\frac{24aN.\,2\pi\delta}{\rho_0}\int\limits_{\rho_0-D}^{\rho_0+D}\int\limits_{D}^{\rho_0+\rho}\frac{1}{\rho^3}\sum_{l=0}^{\infty}c_l\,\frac{\delta^l}{r_0^{\,l+3}}\,dr_0 =$$

$$=\frac{a' N\delta}{\rho_0}\int\limits_{\rho_0-D}^{\rho_0+D}\frac{1}{\rho^3}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{c_l}{l+2}\cdot\frac{\delta^l}{D^{l+2}}-\frac{c_l}{l+2}\cdot\frac{\delta^l}{(\rho_0+\rho)^{l+2}}\right)d\rho <$$

$$<\frac{a' N\delta}{\rho_0 D^2}\int\limits_{\rho_0-D}^{\rho_0+D}\frac{1}{\rho^3}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}c_l\,\frac{\delta^l}{D^l}\,d\rho=\frac{a' N\delta}{2\rho_0 D^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{d}{D}\right)^4}\left\{\frac{1}{(\rho_0-D)^2}-\frac{1}{(\rho_0+D)^2}\right\}=$$

$$=\frac{a' N\delta}{\rho_0 D}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{d}{D}\right)^4}\,\frac{2\rho_0}{(\rho_0^{\,2}-D^2)^2}.$$

откуда ясно, что, при больших ρ_0, интеграл вида $\frac{aN\delta}{\rho_0^3}$.

Для последнего интеграла имеем:

$$\frac{24aN.2\pi\delta}{\rho_0}\int\limits_{\rho_0+D}^{R}\int\limits_{\rho-\rho_0}^{\rho+\rho_0}\frac{1}{\rho^3}\sum_{l=0}^{\infty}c_l\frac{\delta^l}{r_0^{l+3}}d\rho\,dr_0=$$

$$=\frac{a'N\delta}{\rho_0}\int\limits_{\rho_0+D}^{R}\frac{1}{\rho^3}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{c_l}{l+2}\frac{\delta^l}{(\rho-\rho_0)^{l+2}}-\frac{c_l}{l+2}\cdot\frac{\delta^l}{(\rho+\rho_0)^{l+2}}\right)d\rho<$$

$$<\frac{a'N\delta}{\rho_0}\frac{1}{\left(1-\frac{d}{D}\right)^4}\int\limits_{\rho_0+D}^{R}\frac{1}{\rho^3}\cdot\frac{1}{(\rho-\rho_0)^2}d\rho<\frac{a'N\delta}{\rho_0}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{d}{D}\right)^4}\int\limits_{\rho_0+D}^{R}\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\frac{\rho_0^l}{\rho^{l+5}}d\rho=$$

$$=\frac{a'N\delta}{\rho_0}\frac{1}{\left(1-\frac{d}{D}\right)^4}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+1}{l+4}\frac{\rho_0^l}{(\rho_0+D)^{l+4}}<\frac{a'N\delta}{\rho_0}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{d}{D}\right)^4}\frac{1}{(\rho_0+D)^3}\frac{1}{D}\text{, если } R=\infty,$$

откуда ясно, что, при больших ρ_0, интеграл вида $\frac{aN\delta}{\rho_0^3}$.

Собирая все вместе, заключаем, что высказанная теорема справедлива.

Примечание. Содержание §§ 7—13 обнимает вопросы, касающиеся свойств производных второго порядка от объемного потенциала

$$\int\frac{K}{r}d\omega$$

и, вместе со сказанным в главе 2-й, образует теорию этих производных при предположениях, сделанных о плотности K и границах. Сделанные предположения позволяют считать K равной нулю вне некоторой области и, таким образом, считать, что интеграл взят по ограниченной области.

14. Из доказанной теоремы, как одно из следствий, выводим:

Производные от функций U, V, W непрерывны внутри каждой из областей, на которые разделено границами пространство (Ξ).

15. Докажем еще, что производные от функций (3) по q_1, q_2, q_3, при данных q_1, q_2, q_3, непрерывные функции от t.

Из установленных теперь формул

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_1}, \ldots$$

ясно, что, вследствие непрерывности производных

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_1}, \ldots,$$

достаточно доказать непрерывность функций

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}, \ldots,$$

считая в них x, y, z заданными формулами (7) параграфа 6-го, главы 1-й:

$$(26) \qquad \begin{cases} x = q_1 + \int\limits_0^t u(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau, \\ y = q_2 + \int\limits_0^t v(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau, \\ z = q_3 + \int\limits_0^t w(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau. \end{cases}$$

Заметим, что функция K не непрерывная функция от t при данных значениях ξ, η, ζ. Она остается непрерывной, вообще говоря, в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$, не лежащей на границе, до тех пор, пока, перемещаясь с течением времени, граница пространства (Ξ) не пройдет через точку M.

Вследствие этого, нам представляется более простым преобразовать формулы (A') и (B') параграфа 9-го к старым переменным интегрирования p_1, p_2, p_3.

Положим, точке (q_1, q_2, q_3) не на границе, при некотором t, отвечает точка $M'(x_0, y_0, z_0)$, а при некотором другом t' точка $M''(x_0', y_0', z_0')$.

Выбирая t' достаточно близко к t, мы можем расстояние между точками M' и M'' сделать сколь угодно малым и, значит, выбрать за область (D), применяя формулы параграфа 9-го, такую сферу, чтобы, как точка M', так и точка M'' лежали внутри ее, и чтобы сфера не имела общих точек с границей.

Радиус сферы обозначим через D.

Выбирая, чтобы на чем-нибудь остановиться, формулу (A'), имеем:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M'} = -K_0\frac{4\pi}{3} + \int\limits_{(D)}(K-K_0)\left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5}-\frac{1}{r_0^3}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$

$$+\int\limits_{(R-D)}K\left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5}-\frac{1}{r_0^3}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M''} = -K_1'\frac{4\pi}{3} + \int\limits_{(D)}(K'-K_1')\left\{\frac{3(\xi-x_0')^2}{r_0'^5}-\frac{1}{r_0'^3}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$

$$+\int\limits_{(R-D)}K'\left\{\frac{3(\xi-x_0')^2}{r_0'^5}-\frac{1}{r_0'^3}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

где через r_0 и r_0' обозначены расстояния от точек M' и M'' до переменной точки, а знаком K' обозначены значения K при t'.

Возвращаясь к переменным интегрирования p_1, p_2, p_3, получаем для первой формулы

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M'} = -\frac{4\pi}{3}\frac{L_0}{J_0} + \int\limits_{(D_t)}\left(L-\frac{L_0}{J_0}J\right)\left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5}-\frac{1}{r_0^3}\right\}d\omega + \tag{27}$$

$$+\int\limits_{(R-D_t)}L\left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5}-\frac{1}{r_0^3}\right\}d\omega,$$

где ζ, η, ξ даны формулами (2), x_0, y_0, z_0 формулами (26), и где область (D_t) ограничена поверхностью, которую можно параметрически задать уравнениями:

$$\left\{\begin{aligned} x_0 + D\sin\theta\cos\varphi &= q_1 + \int_0^t u(q_1, q_2, q_3, \tau)\,d\tau,\\ y_0 + D\sin\theta\sin\varphi &= q_2 + \int_0^t v(q_1, q_2, q_3, \tau)\,d\tau,\\ z_0 + D\cos\theta &= q_3 + \int_0^t w(q_1, q_2, q_3, \tau)\,d\tau, \end{aligned}\right. \tag{28}$$

считая, что точка M' в центре сферы (D);

для второй формулы получаем:

$$(27')\quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M''} = -\frac{4\pi}{3}\frac{L_0'}{J_0'} + \int\limits_{(Dt')} \left(L' - \frac{L_0'}{J_0'} J'\right)\left\{\frac{3(\xi' - x_0')^2}{r_0'^5} - \frac{1}{r_0'^3}\right\} d\omega +$$

$$+ \int\limits_{(R-Dt')} L' \left\{\frac{3(\xi' - x_0')^2}{r_0'^5} - \frac{1}{r_0'^3}\right\} d\omega,$$

где ζ', η', ξ' получаются из формул (2) заменою t через t', x_0', y_0', z_0' даны формулами (26), в которых t заменено через t' и область $(D_{t'})$ ограничена поверхностью, уравнения которой получаются из (28) заменою t на t'.

Вследствие непрерывности L и J, разность между первыми слагаемыми в (27) и (27′) бесконечно мала вместе с $t' - t$.

Переходим к разности между вторыми слагаемыми.

Прежде всего мы можем написать

$$\int\limits_{(D_{t'})} \left(L' - \frac{L_0'}{J_0'} J'\right)\left\{\frac{3(\xi' - x_0')^2}{r_0'^5} - \frac{1}{r_0'^3}\right\} d\omega =$$

$$= \int\limits_{(D_t)} \left(L' - \frac{L_0'}{J_0'} J'\right)\left\{\frac{3(\xi' - x_0')^2}{r_0'^5} - \frac{1}{r_0'^3}\right\} d\omega +$$

$$+ \int\limits_{(D_{t'} - D_t)} \left(L' - \frac{L_0'}{J_0'} J'\right)\left\{\frac{3(\xi' - x_0')^2}{r_0'^5} - \frac{1}{r_0'^3}\right\} d\omega,$$

где в последнем интеграле интегрирование распространено по области между границами (D_t) и $(D_{t'})$ и некоторые части интеграла надо брать со знаком (+), а некоторые со знаком (—).

Оценим прежде всего этот последний интеграл.

Мы можем считать, что t' настолько близко к t, что расстояние от M'' до M' менее $\frac{D}{2}$. Отметим, что проекции этого расстояния на оси координат равны

$$\int\limits_t^{t'} u(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau, \quad \int\limits_t^{t'} v(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau, \quad \int\limits_t^{t'} w(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau.$$

Найдем нижний предел расстояния точки (q_1, q_2, q_3) от границы области (D_t) и от границы области $(D_{t'})$.

Если ρ это расстояние, то для области (D_t), как вытекает из формул параграфа 10-го главы 1-ой:

$$\rho > D \cdot \frac{1}{1+3B} > \frac{3}{4} D, \text{ считая } B < \frac{1}{9} \cdot$$

Если

$$\xi - x_0, \quad \eta - y_0, \quad \zeta - z_0$$

составляющие отрезка, соединяющего точку на границе $(D_{t'})$ с точкой M', то они равны соответственно

$$p_1 + \int_0^{t'} u(p_1, p_2, p_3, \tau)\, d\tau - q_1 - \int_0^{t} u(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau =$$

$$= p_1 - q_1 + \int_0^{t_1'} \big(u(p) - u(q)\big)\, d\tau - \int_t^{t_1'} u(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau,$$

$$p_2 + \int_0^{t'} v(p_1, p_2, p_3, \tau)\, d\tau - q_2 - \int_0^{t} v(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau =$$

$$= p_2 - q_2 + \int_0^{t'} \big(v(p) - v(q)\big)\, d\tau - \int_t^{t'} v(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau,$$

$$p_3 + \int_0^{t'} w(p_1, p_2, p_3, \tau)\, d\tau - q_3 - \int_0^{t} w(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau =$$

$$= p_3 - q_3 + \int_0^{t'} \big(w(p) - w(q)\big)\, d\tau - \int_t^{t'} w(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau,$$

откуда видно, что этот отрезок можно трактовать как замыкающую трех отрезков, составляющие которых соответственно:

$$p_1 - q_1, \quad p_2 - q_2, \quad p_3 - q_3,$$

$$\int_0^{t'} \big(u(p) - u(q)\big)\, d\tau, \quad \int_0^{t'} \big(v(p) - v(q)\big)\, d\tau, \quad \int_0^{t'} \big(w(p) - w(q)\big)\, d\tau,$$

$$-\int_t^{t'} u(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau, \quad -\int_t^{t'} v(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau, \quad -\int_t^{t'} w(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau.$$

Отсюда

$$D<\rho+3B\rho+\frac{D}{2};$$

так как третий отрезок меньше $\frac{D}{2}$, и

$$\rho>\frac{D}{2}\frac{1}{1+3B}>\frac{3}{8}D.$$

Отсюда заключаем, что расстояние от точки (q_1, q_2, q_3) до точки внутри области интегрирования больше $\frac{3}{8}D$ и, значит,

$$r_0'>\frac{3}{8}D(1-3B)>\frac{1}{4}D,$$

и функция, стоящая под знаком интеграла, абсолютно меньше

$$\left(N+N\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)\frac{4}{\left(\frac{1}{4}D\right)^3}=c,$$

ибо

$$\frac{2}{3}<J<\frac{3}{2}.$$

Значит, интеграл по абсолютной величине меньше произведения числа c на объем тела, заключенного между поверхностями (D_t) и $(D_{t'})$, параметрические уравнения которых, как вытекает из формул (28):

$$q_1=q_1(x,y,z,t),\quad q_2=q_2(x,y,z,t),\quad q_3=q_3(x,y,z,t),$$

и

$$q_1=q_1(x,y,z,t'),\quad q_2=q_2(x,y,z,t'),\quad q_3=q_3(x,y,z,t'),$$

где

$$x=x_0+Dh\theta\cos\varphi,\quad y=y_0+D\sin\theta\sin\varphi,\quad z=z_0+D\cos\theta,$$

и правые части — суммы рядов (9) параграфа 7-го главы 1-ой.

Этот же объем бесконечно мал, когда разность $t'-t$ бесконечно мала, так как поверхность $(D_{t'})$, когда t' стремится к t, стремится к слиянию с поверхностью (D_t).

Написав, подобно этому,

$$\int\limits_{(R-D_t')} L'\left\{\frac{3(\xi'-x_0')^2}{r_0'^5}-\frac{1}{r_0'^3}\right\}d\omega=\int\limits_{(R-D_t)} L'\left\{\frac{3(\xi'-x_0')^2}{r_0'^5}-\frac{1}{r_0'^3}\right\}d\omega+$$

$$+\int\limits_{(D_t-D_t')} L'\left\{\frac{3(\xi'-x_0)^2}{r_0'^5}-\frac{1}{r_0'^3}\right\}d\omega$$

убедимся, что последний интеграл равен произведению числа c'', где

$$c''=\frac{4N}{\left(\frac{1}{4}D\right)^3},$$

на число, бесконечно малое с $t'-t$.

Итак, рассмотренные интегралы бесконечно малы вместе с $|t'-t|$.

Сравнивая оставшиеся интегралы, прежде всего имеем:

$$\int\limits_{(D_t)}\left(L'-\frac{L_0'}{J_0'}J'\right)\left\{\frac{3(\xi'-x_0)^2}{r_0'^5}-\frac{1}{r_0'^3}\right\}d\omega-\int\limits_{(D_t)}\left(L-\frac{L_0}{J_0}J\right)\left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5}-\frac{1}{r_0^3}\right\}d\omega=$$

$$=\int\limits_{(D_t)}\left[\left(L'-\frac{L_0'}{J_0'}J'\right)-\left(L-\frac{L_0}{J_0}J\right)\right]\left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5}-\frac{1}{r_0^3}\right\}d\omega+$$

$$\int\limits_{(D_t)}\left(L-\frac{L_0}{J_0}J\right)\left[\left\{\frac{3(\xi'-x_0')^2}{r_0'^5}-\frac{1}{r_0'^3}\right\}-\left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5}-\frac{1}{r_0^3}\right\}\right]d\omega.$$

Вследствие существования производных у L и J:

$$\left|\left(L'-\frac{L_0'}{J_0'}J'\right)-\left(L-\frac{L_0}{J_0}J\right)\right|<c\,|t'-t|,\ c \text{ некоторое число;}$$

вследствие условия (III) параграфа 1-го этой главы:

$$\left|L-\frac{L_0}{J_0}J\right|<c'r^{1-\lambda},\quad \left|L'-\frac{L_0'}{J_0'}J'\right|<c'r^{1-\lambda},$$

где r расстояние от (q_1, q_2, q_3) до (p_1, p_2, p_3), откуда

$$\left|\left(L'-\frac{L_0'}{J_0'}J\right)-\left(L-\frac{L_0}{J_0}J\right)\right|<c''r^{1-\lambda},\ c'' \text{ некоторое число.}$$

Перемножая полученные неравенства и извлекая корень, получаем

$$\left|\left(L' - \frac{L_0'}{J_0'} J'\right) - \left(L - \frac{L_0}{J_0} J\right)\right| < \sqrt{cc'}\, |t' - t|^{\frac{1}{2}} r^{1 - \frac{1+\lambda}{2}}.$$

Применяя теперь неравенство (4), заключаем, что первый интеграл абсолютно меньше

$$4\pi a_0^3 \sqrt{cc'}\, |t' - t|^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{4}{3}D} \frac{r^{3 - \frac{1+\lambda}{2}}}{r^3} dr = \frac{4\pi a_0^3 \sqrt{cc'}\, |t' - t|^{\frac{1}{2}}}{\frac{1-\lambda}{2}} \left(\frac{4}{3} D\right)^{\frac{1-\lambda}{2}},$$

т. е. бесконечно мал вместе с $|t' - t|$.

Мы интегрировали от 0 до $\frac{4}{3} D$, так как точки границы (D_t) удалены от (q_1, q_2, q_3) не более чем на

$$D(1 + 3B) < \frac{4}{3} D.$$

Вспоминая сказанное в параграфе 5-м, заключаем, что

$$\left\{\frac{3(\xi' - x_0')^2}{r_0'^5} - \frac{1}{r_0'^3}\right\} - \left\{\frac{3(\xi - x_0)^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3}\right\} = \left((\xi' - x_0') - (\xi - x_0)\right) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\bigg|_1 +$$

$$+ \left((\eta' - y_0') - (\eta - y_0)\right) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y}\bigg|_1 + \left((\zeta' - z_0') - (\zeta - z_0)\right) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z}\bigg|_1,$$

где знак (1) говорит, что производная от $\frac{1}{r}$ вычислена в точке

$$(10') \quad \begin{cases} \xi - x_0 + \theta\{(\xi' - x_0') - (\xi - x_0)\}, \quad \eta - y_0 + \theta\{(\eta' - y_0') - (\eta - y_0)\}, \\ \zeta - z_0 + \theta\{(\zeta' - z_0') - (\zeta - z_0)\}, \quad 0 < \theta < 1, \end{cases}$$

откуда, заимствуя обозначения параграфа 5-го, видим, что изучаемая разность меньше:

$$\frac{24 \cdot 3rb'\, |t' - t|\, c^{\frac{4}{3}}}{r^4}.$$

Значит, второй интеграл, считая для краткости

$$\left|L - \frac{L_0}{J_0} J\right| < a' r^{1-\lambda},$$

абсолютно меньше

$$24 \,.\, 3 \,.\, b' c^{\frac{4}{3}} a' |t'-t| \int_0^{\frac{4}{3}D} \frac{r^{3-\lambda}\, dr}{r^3} < a'' \left(\frac{4}{3} D\right)^{1-\lambda} |t'-t|$$

и бесконечно мал вместе с $|t'-t|$.

Таким же образом для последних интегралов имеем:

$$\int\limits_{(R-D_t)} L' \left\{\frac{3(\xi'-x_0')^2}{r_0'^5} - \frac{1}{r_0'^3}\right\} d\omega - \int\limits_{(R-D_t)} L \left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3}\right\} d\omega =$$

$$= \int\limits_{(R-D_t)} (L'-L) \left\{\frac{3(\xi'-x_0')^2}{r_0'^5} - \frac{1}{r_0'^3}\right\} d\omega +$$

$$+ \int\limits_{(R-D_t)} L \left[\left\{\frac{3(\xi'-x_0')^2}{r_0'^5} - \frac{1}{r_0'^3}\right\} - \left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3}\right\}\right] d\omega$$

при

$$|L'-L| < c|t'-t| \text{ или } \rho_0^4 |L'-L| < c|t'-t|,$$

как вытекает из формул (I) и (I') параграфа 1-го; при этом, как выяснено,

$$\left|\frac{3(\xi'-x_0')^2}{r_0'^5} - \frac{1}{r_0'^3}\right| < \frac{4\, a_0^3}{r^3} < \frac{4\, a_0^3}{\left(\frac{3}{4} D\right)^3}$$

$$\left|\left\{\frac{3(\xi'-x_0')^2}{r_0'^5} - \frac{1}{r_0'^3}\right\} - \left\{\frac{3(\xi-x_0)^2}{r_0^5} - \frac{1}{r_0^3}\right\}\right| < \frac{24 \,.\, 3 \,.\, b' |t'-t|}{r^3} c^{\frac{4}{3}} <$$

$$< \frac{24 \,.\, 3 \,.\, b' c^{\frac{4}{3}} |t'-t|}{\left(\frac{3D}{4}\right)^3}.$$

Значит, оставшиеся интегралы меньше соответственно:

$$\frac{4\, a_0^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3D}{4}\right)^3} |t'-t| \left\{\int\limits_{(R_0)} c\, d\omega + \int\limits_{(R-R_0)} \frac{c}{\rho^4} d\omega\right\} \text{ и } \frac{24 \,.\, 3 \,.\, b' c^{\frac{4}{3}}}{\left(\frac{3D}{4}\right)^3} |t'-t| \int |L|\, d\omega$$

и, вследствие ограниченности оставшихся интегралов, бесконечно малы вместе с $|t' - t|$.

Вследствие всего сказанного, теорему о непрерывности производных как функций от t можно считать установленной.

16. Резюмируя сказанное в этой главе получаем:

Если функция L удовлетворяет в пространстве (Q) условиям, перечисленным в параграфе 1-м, то функции

$$(3) \qquad U, V, W$$

(I_1) непрерывны во всем пространстве (Q) и при всяком рассматриваемом значении t;

(II_1) удовлетворяют неравенствам:

$$|U| < aN, \quad |V| < aN, \quad |W| < aN,$$

$$\rho^2 |U| < aN, \quad \rho^2 |V| < aN, \quad \rho^2 |W| < aN,$$

где ρ расстояние от начала координат до точки (q_1, q_2, q_3).

(V_1) Если точка $M(q_1, q_2, q_3)$ не принадлежит границе пространства (Q), то функции (3) имеют производные

$$(29) \qquad \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial W}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

причем эти производные непрерывны, как функции точки внутри каждой из областей, и во всякой точке M непрерывные функции от t

(VI_1) и во всем пространстве (Q) удовлетворяют неравенствам:

$$\left|\frac{\partial U}{\partial q_i}\right| < aN, \quad \left|\frac{\partial V}{\partial q_i}\right| < aN, \quad \left|\frac{\partial W}{\partial q_i}\right| < aN,$$

$$\rho^3 \left|\frac{\partial U}{\partial q_i}\right| < aN, \quad \rho^3 \left|\frac{\partial V}{\partial q_i}\right| < aN, \quad \rho^3 \left|\frac{\partial W}{\partial q_i}\right| < aN.$$

Если точка $M_0(q_1^0, q_2^0, q^0_3)$ принадлежит границе и точка M приближается к M_0, оставаясь по одну сторону от границы, то производные (29)

(VII_1) стремятся к определенным пределам.

Если эти пределы

$$(30) \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_\alpha, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_\alpha, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)_\alpha, \qquad i = 1, 2, 3,$$

где α есть значок (1), когда M в первой области, и значок (2), когда M во второй, то

$$(\mathrm{VIII}_1)\qquad \left|\frac{\partial U}{\partial q_i}-\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_\alpha\right|<aN\delta^{1-\lambda},\quad \left|\frac{\partial V}{\partial q_i}-\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_\alpha\right|<aN\delta^{1-\lambda},$$
$$\left|\frac{\partial W}{q_i}-\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)_\alpha\right|<aN\delta^{1-\lambda},$$

где δ расстояние от M до M_0.

Наконец, если точки M_1 и M_2 лежат по одну сторону от границы и δ расстояние между ними, то

$$(\mathrm{IX}_1)\quad \begin{cases} \left|\frac{\partial U}{\partial q_i}\Big|_{M_1}-\frac{\partial U}{\partial q_i}\Big|_{M_2}\right|<aN\delta^{1-\lambda},\quad \left|\frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_{M_1}-\frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_{M_2}\right|\leq aN\delta^{1-\lambda}, \\ \left|\frac{\partial W}{\partial q_i}\Big|_{M_1}-\frac{\partial W}{\partial q_i}\Big|_{M_2}\right|<aN\delta^{1-\lambda}, \\ \rho^3\left|\frac{\partial U}{\partial q_i}\Big|_{M_1}-\frac{\partial U}{\partial q_i}\Big|_{M_2}\right|<aN\delta^{1-\lambda},\quad \rho^3\left|\frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_{M_1}-\frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_{M_2}\right|<aN\delta^{1-\lambda}, \\ \left|\frac{\partial W}{\partial q_i}\Big|_{M_1}-\frac{\partial W}{\partial q_i}\Big|_{M_2}\right|<aN\delta^{1-\lambda}, \end{cases}$$

где ρ расстояние до одной из точек M_1, M_2; здесь δ предполагается настолько малым, чтобы точки M_1 и M_2 были внутри той же сферы, радиус которой определен условием (γ) А. М. Ляпунова.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Решение гидродинамической задачи.

1. Положим, что даны функции

$$(1)\qquad u_0,\ v_0,\ w_0$$

от q_1, q_2, q_3, не зависящие от t и удовлетворяющие условиям, перечисленным в параграфе 3-м главы 1-ой, в предположении, что встречающаяся там функция A имеет постоянное значение A_0:

$$(2)\qquad A=A_0.$$

Другими словами, положим, что функции (1):

(I_0) непрерывны во всем пространстве (Q), и

(II_0) удовлетворяют во всем пространстве (Q) неравенствам

$$|u_0| < A_0, \ldots\ldots, \rho\, |u_0| < A_0,$$

где ρ расстояние точки M_1, в которой вычислены значения функций, от начала координат; кроме того, положим, что функции (1):

(V_0) во всякой точке M_1 не лежащей на границе, имеют непрерывные производные

$$\frac{\partial u_0}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial w_0}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

удовлетворяющие неравенствам

$$(VI_0) \qquad \left|\frac{\partial u_0}{\partial q_i}\right| < A_0, \ldots\ldots, \ \rho^2 \left|\frac{\partial u_0}{\partial q_i}\right| < A_0, \ldots\ldots,$$

(VII_0) стремящиеся к определенным пределам

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial q_i}\right)_1, \ \left(\frac{\partial v_0}{\partial q_i}\right)_1, \ \left(\frac{\partial w_0}{\partial q_i}\right)_1, \ \left(\frac{\partial u_0}{\partial q_i}\right)_2, \ \left(\frac{\partial v_0}{\partial q_i}\right)_2, \ \left(\frac{\partial w_0}{\partial q_i}\right)_2, \qquad i = 1, 2, 3,$$

когда точка M приближается к точке M_0 на границе, не выходя из области первой или второй, причем стремящиеся к пределам так, что

$$(VIII_0) \qquad \left|\frac{\partial u_0}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial u_0}{\partial q_i}\right)_\alpha\right| < A_0 r_0^{1-\lambda}, \ \left|\frac{\partial v_0}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial v_0}{\partial q_i}\right)_\alpha\right| < A_0 r_0^{1-\lambda},$$

$$\left|\frac{\partial w_0}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial w_0}{\partial q_i}\right)_\alpha\right| < A_0 r_0^{1-\lambda},$$

где r_0 расстояние точки M от M_0 и

$$0 < \lambda < 1.$$

Наконец положим, обозначая через

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial q_i}\right], \ldots\ldots$$

абсолютные значения разностей между производными в точках M_1 и M_2, расположенных по одну сторону от границ и удаленных одна от другой на r, где r достаточно мало, что

$$(\mathrm{IX}_0) \qquad \left[\frac{\partial u_0}{\partial q_i}\right] < A_0 r^{1-\lambda}, \ldots\ldots, \ \rho^2 \left[\frac{\partial u_0}{\partial q_i}\right] < A_0 r^{1-\lambda}, \ldots\ldots.$$

По функциям (1) мы составим функции

$$(3) \qquad u_1,\ v_1,\ w_1$$

от q_1, q_2, q_3 и t, удовлетворяющие всем условиям параграфа 3-го главы 1-ой при предположении

$$A = A_1,$$

где A_1 некоторая функция от t;
по функциям (3) мы составим новые

$$u_2,\ v_2,\ w_2$$

и так далее.

Мы покажем, как по предыдущей группе составлять последующую, описав, как по функциям

$$(4) \qquad u_n,\ v_n,\ w_n,$$

удовлетворяющим условиям указанного параграфа 3-го, при

$$(5) \qquad A = A_n,$$

составить функции

$$(6) \qquad u_{n+1},\ v_{n+1},\ w_{n+1},$$

которые также удовлетворяют всем условиям этого параграфа 3-го, при

$$A = A_{n+1},$$

где A_{n+1} некоторая функция от t, легко составимая, когда дано A_n.

2. Итак положим, что даны функции (4), удовлетворяющие всем условиям параграфа 3-го главы 1-ой, при

$$(5) \qquad A = A_n.$$

Положим

$$(7) \qquad B_n = \int_0^t A_n dt$$

и составим, как в параграфе 6-м главы 1-ой функции

$$(8) \quad \begin{cases} x_n = q_1 + \int_0^t u_n(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau, \qquad y_n = q_2 + \int_0^t v_n(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau, \\ z_n = q_3 + \int_0^t w_n(q_1, q_2, q_3, \tau)\, d\tau. \end{cases}$$

К функциям (8) применимо все сказанное в главе 1-ой о функциях x, y, z в предположении, что

$$B = B_n.$$

Будем считать, что время t ограничено условием

$$(9) \qquad B_n < \frac{1}{9},$$

и составим при помощи функций (4) и (8) функцию

$$(10)\ L_n = 2\begin{vmatrix} \frac{\partial u_n}{\partial q_1}, & \frac{\partial u_n}{\partial q_2}, & \frac{\partial u_n}{\partial q_3} \\ \frac{\partial v_n}{\partial q_1}, & \frac{\partial v_n}{\partial q_2}, & \frac{\partial v_n}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z_n}{\partial q_1}, & \frac{\partial z_n}{\partial q_2}, & \frac{\partial z_n}{\partial q_3} \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \frac{\partial u_n}{\partial q_1}, & \frac{\partial u_n}{\partial q_2}, & \frac{\partial u_n}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y_n}{\partial q_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial q_2}, & \frac{\partial y_n}{\partial q_3} \\ \frac{\partial w_n}{\partial q_1}, & \frac{\partial w_n}{\partial q_2}, & \frac{\partial w_n}{\partial q_3} \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial q_1}, & \frac{\partial x_n}{\partial q_2}, & \frac{\partial x_n}{\partial q_3} \\ \frac{\partial v_n}{\partial q_1}, & \frac{\partial v_n}{\partial q_2}, & \frac{\partial v_n}{\partial q_3} \\ \frac{\partial w_n}{\partial q_1}, & \frac{\partial w_n}{\partial q_2}, & \frac{\partial w_n}{\partial q_3} \end{vmatrix}.$$

Докажем, что функция L_n удовлетворяет условиям, перечисленным в параграфе 1-м главы 3-ей, при

$$(11) \qquad N = cA_n^2,$$

где c некоторое число, не зависящее от n.

Прежде всего, L_n непрерывная функция от переменных q_1, q_2, q_3 и переменного t внутри всякой области, на которые разделено пространство (Q), так как по условию (V) параграфа 3-го этим свойством обладают производ-

ные от u_n, v_n, w_n, и по доказанному в параграфе 6-м это же свойство принадлежит производным от x_n, y_n, z_n.

Так как по тому же свойству (V) производные от u_n, v_n, w_n имеют производные по t, и это же свойство принадлежит производным от x_n, y_n, z_n, L_n имеет непрерывную производную по t.

Пользуясь свойством (VI) и замечая, что при соблюдении (9) производные от x_n, y_n, z_n не превосходят числа $\frac{10}{9}$, видим, что

$$|L_n| < aA_n^2,$$

где

$$a \leqq 2 . \frac{10}{9} \cdot 18.$$

По тому же самому

$$\rho^4 \, |L_n| < aA_n^2.$$

Составляя производные по t и замечая, что производные по t от $\frac{\partial x_n}{\partial q_1}, \ldots\ldots \frac{\partial z_n}{\partial q_3}$ не превосходят A_n, заключаем, что

$$\left|\frac{\partial L_n}{\partial t}\right| < N^{(1)}, \quad \rho^4 \left|\frac{\partial L_n}{\partial t}\right| < N^{(1)},$$

где $N^{(1)}$ некоторая функция от t.

Замечая, что, если α, β, γ некоторые функции и α', β', γ', α'', β'', γ'' их значения в точках M' и M'', расстояние между которыми r_0, то

$$[\alpha\beta\gamma] \leqq [\alpha] \; |\beta''| \cdot |\gamma''| + [\beta] \; |\alpha'| \cdot |\gamma''| + [\gamma] \; |\alpha'| \cdot |\beta'|,$$

заключаем, пользуясь условием (IX) и формулами параграфа 6-го, что

$$[L_n] < 3a\,A_n^2 r_0^{1-\lambda}, \quad \rho^4 [L_n] < 3a\,A_n^2 r_0^{1-\lambda},$$

$$\left[\frac{\partial L_n}{\partial t}\right] < 3\,N^{(1)} r_0^{1-\lambda}, \quad \rho^4 \left[\frac{\partial L_n}{\partial t}\right] < 3\,N^{(1)} r_0^{1-\lambda}.$$

Вследствие задания (VII) о производных от функций u_n, v_n, w_n, эти производные, а также производные от x_n, y_n, z_n, стремятся к определенным пределам, когда точка приближается к точке на границе и, следовательно, L_n также приближается к определенному пределу, когда точка стремится к точке на границе.

Наконец, вследствие условий (VIII), рассуждая как выше, заключаем, что

$$|L_n - (L_n)| < 3a\, A_n^2 r_0^{1-\lambda}, \quad \left|\frac{\partial L_n}{\partial t} - \left(\frac{\partial L_n}{\partial t}\right)\right| < 3\, N^{(1)} r_0^{1-\lambda}.$$

Все сказанное говорит, что за число c можно взять $3a$.

Установив сказанное о функции L_n, мы можем, согласно со сказанным в параграфе 2-м главы 3-й, составить функции

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} U_n &= \int \frac{L_n(\xi_n - x_n)}{r_n^3}\, d\omega, \quad V_n = \int \frac{L_n(\eta_n - y_n)}{r_n^3}\, d\omega, \\ W_n &= \int \frac{L_n(\zeta_n - z_n)}{r_n^3}\, d\omega, \end{aligned} \right.$$

в которых ξ_n, η_n, ζ_n получаются из (8) заменою в них q_1, q_2, q_3 через p_1, p_2, p_3, а

$$r_n^2 = (\xi_n - x_n)^2 + (\eta_n - y_n)^2 + (\zeta_n - z_n)^2.$$

Функции (12) будут обладать всеми свойствами, перечисленными в параграфе 16-м главы 3-й, при условии, что N, входящее в указанные там неравенства, заменено числом

$$c\, A_n^2.$$

Постоянное число a, входящее в те неравенства, очевидно от n не зависит.

Имея функции (12), положим, наконец:

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_{n+1} &= u_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t U_n\, dt, \quad v_{n+1} = v_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t V_n\, dt, \\ w_{n+1} &= w_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t W_n\, dt. \end{aligned} \right.$$

Примечание. Теоремы о непрерывности функций (12) как функций от t, установленные нами в параграфах 5-м и 15-м главы 3-й, а вместе с этим все условия о производной от L_n по t нам нужны только для установления интегрируемости по t функций (12).

3. Прежде всего проверим, что функции (13) удовлетворяют всем условиям параграфа 3-го главы 1-й, и найдем соответствующую им функцию A_{n+1}.

(I) Они непрерывны во всем пространстве и при всяком значении t, так как функции

(6) $$u_0,\ v_0,\ w_0$$

и функции (12) непрерывны во всем пространстве; при этом:

(II) $$|u_{n+1}| < A_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t ac\, A_n^2\, dt,$$

$$\rho\,|u_{n+1}| < \rho\,|u_0| + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \rho\,|U_n|\, dt < A_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \frac{1}{\rho}\, ac\, A_n^2\, dt,$$

откуда, при $\rho \geqq 1$,

$$\rho\,|u_{n+1}| < A_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t ac\, A_n^2\, dt, \ldots.$$

(III) Производные по t от функций (13) равны функциям (12) и потому непрерывны во всем пространстве (Q) и при всех значениях t.

При этом:

(IV) $$\left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t}\right| < \frac{ac}{4\pi} A_n^2, \quad \rho\left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t}\right| < \frac{ac}{4\pi}\cdot\frac{A_n^2}{\rho} < \frac{ac}{4\pi} A_n^2, \ldots.$$

(V) Если точка (q_1, q_2, q_3) не принадлежит границе, то, так как функции (1) и функции (12) имеют непрерывные производные по q_1, q_2, q_3, функции (13) имеют производные по q_1, q_2, q_3, причем

(VI) во всем пространстве (Q):

$$\left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial q_i}\right| < \left|\frac{\partial u_0}{\partial q_i}\right| + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \left|\frac{\partial U_n}{\partial q_i}\right| dt < A_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t ac\, A_n^2\, dt, \ldots$$

и также

$$\rho^2\left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial q_i}\right| < A_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t ac\, A_n^2\, dt, \ldots.$$

При этом, так как

$$\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial q_i\, \partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial U_n}{\partial q_i},$$

то

$$\left|\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial q_i\, \partial t}\right| < \frac{ac}{4\pi} A_n^2, \quad \rho^2 \left|\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial q_i\, \partial t}\right| < \frac{ac\, A_n^2}{4\pi\rho} < \frac{ac}{4\pi} A_n^2.$$

(VII) Производные от функций (13) стремятся к определенным пределам, когда точка M приближается к точке M_0 на границе, причем эти пределы:

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial q_i}\right)_\alpha + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \left(\frac{\partial U_n}{\partial q_i}\right)_\alpha dt, \quad \left(\frac{\partial v_0}{\partial q_i}\right) + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \left(\frac{\partial V_n}{\partial q_i}\right)_\alpha dt,$$

$$\left(\frac{\partial w_0}{\partial q_i}\right)_\alpha + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \left(\frac{\partial W_n}{\partial q_i}\right)_\alpha dt,$$

где $\alpha = 1$, если точка M в первой области, и $\alpha = 2$, если точка M во второй области.

При этом, очевидно,

(VIII)
$$\left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial q_i}\right)_\alpha\right| \leqq \left|\frac{\partial u_0}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial u_0}{\partial q_i}\right)_\alpha\right| +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^t \left|\frac{\partial U_n}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial U_n}{\partial q_i}\right)_\alpha\right| dt < \left(A_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t ac\, A_n^2\, dt\right) r_0^{1-\lambda}, \ldots,$$

где r_0 расстояние от M до M_0.

Для производных по t имеем

$$\left|\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial t\, \partial q_i} - \left(\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial t\, \partial q_i}\right)_\alpha\right| < \frac{ac}{4\pi} A_n^2 r_0^{1-\lambda}, \ldots.$$

Наконец, получаем, что

(IX)
$$\begin{cases} \left[\frac{\partial u_{n+1}}{\partial q_i}\right] \leqq \left[\frac{\partial u_0}{\partial q_i}\right] + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \left[\frac{\partial U_n}{\partial q_i}\right] dt < \left(A_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t ac\, A_n^2\, dt\right) r^{1-\lambda}, \ldots, \\ \rho^2 \left[\frac{\partial u_{n+1}}{\partial q_i}\right] \leqq \left(A_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \frac{ac}{\rho} A_n^2\, dt\right) r^{1-\lambda} < \left(A_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t ac\, A_n^2\, dt\right) r^{1-\lambda}, \ldots, \\ \left[\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial q_i\, \partial t}\right] < \frac{ac}{4\pi} A_n^2 r^{1-\lambda}, \ldots, \quad \rho^2 \left[\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial q_i\, \partial t}\right] < \frac{ac}{4\pi} A_n^2 r^{1-\lambda}, \ldots, \end{cases}$$

где r расстояние между точками M_1, M_2, расположенными по одну сторону от границ, которым соответствует знак [ ].

Из всего сказанного вытекает, что можно положить:

(14)
$$A_{n+1} = A_0 + k \int_0^t A_n^2\, dt,$$

где

$$k = \frac{ac}{4\pi}$$

и не зависит от n.

4. Не трудно убедиться, что A_n с увеличением n стремится к пределу. Действительно, процесс последовательного вычисления функций

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

по формуле (14) равносилен нахождению решения уравнения

(15)
$$\frac{dy}{dt} = ky^2,$$

удовлетворяющего условию

$$\text{при } t = 0,\ y = A_0,$$

методой последовательных приближений.

Следовательно, при достаточно малых t,

$$\text{прд } A_n = y,$$

где y решение уравнения (15), равное A_0, при $t = 0$.

Интегрируя уравнение (15) при указанном начальном условии, находим

$$y = \frac{A_0}{1 - A_0 kt} = A.$$

Очевидно,

$$A_0 < A;$$

если, при некотором n и $t < \frac{1}{A_0 k}$,

(16)
$$A_n < A = \frac{A_0}{1 - A_0 kt},$$

то

$$A_{n+1} < A_0 + k\int_0^t \frac{A_0^2}{(1-A_0kt)^2}\,dt = \frac{A_0}{1-A_0kt}.$$

Значит, при $t < \frac{1}{A_0k}$ неравенство (16) справедливо при всяком n.

Вследствие этого,

$$B_n = \int_0^t A_n\,dt < \int_0^t \frac{A_0}{1-A_0kt}\,dt = \frac{1}{k}\log\frac{1}{1-A_0kt}$$

и все неравенства

(9) $$B_n < \frac{1}{9}$$

соблюдены, если

(17) $$t < \frac{1-e^{-\frac{k}{9}}}{A_0k} = b_0.$$

Если t удовлетворяет неравенству (17), то

$$A < A_0\,e^{\frac{k}{9}}.$$

Вследствие этого, если окажется удобным, мы будем в дальнейшем заменять A_n в неравенствах постоянным

(18) $$a_0 = A_0\,e^{\frac{k}{9}}.$$

5. Из сказанного вытекает, что функции

(4) $$u_n,\ v_n,\ w_n$$

с их производными по q_1, q_2, q_3, при всяком n, ограничены во всем пространстве.

Мы докажем, что как функции (4), так и их производные стремятся к определенным пределам, когда n беспредельно возрастает.

Для доказательства, мы рассмотрим ряды

(19) $$\left\{\begin{array}{l}(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\cdots,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right.$$

(20) $$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u_1}{\partial q_i}-\frac{\partial u_0}{\partial q_i}\right)+\left(\frac{\partial u_2}{\partial q_i}-\frac{\partial u_1}{\partial q_i}\right)+\cdots,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right.$$

и докажем, что ряды (19) и (20) сходятся абсолютно во всякой точке пространства (Q), не лежащей на границе; что ряды, получаемые из (20) заменою их членов теми их пределами, к которым они стремятся, когда точка приближается к границе, и ряды, получаемые из (19) заменою (q_1, q_2, q_3) координатами точки на границе, сходятся.

6. Положим, обозначая через G_n возрастающую функцию от t:

$$(21)\quad \begin{cases} |u_n - u_{n-1}| < G_n, & |v_n - v_{n-1}| < G_n, & |w_n - w_{n-1}| < G_n, \\ \rho\,|u_n - u_{n-1}| < G_n, & \rho\,|v_n - v_{n-1}| < G_n, & \rho\,|w_n - w_{n-1}| < G_n, \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} \left|\frac{\partial u_n}{\partial q_i} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial q_i}\right| < G_n, & \left|\frac{\partial v_n}{\partial q_i} - \frac{\partial v_{n-1}}{\partial q_i}\right| < G_n, & \left|\frac{\partial w_n}{\partial q_i} - \frac{\partial w_{n-1}}{\partial q_i}\right| < G_n, \\ \rho^2\left|\frac{\partial u_n}{\partial q_i} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial q_i}\right| < G_n, & \rho^2\left|\frac{\partial v_n}{\partial q_i} - \frac{\partial v_{n-1}}{\partial q_i}\right| < G_n, & \rho^2\left|\frac{\partial w_n}{\partial q_i} - \frac{\partial w_{n-1}}{\partial q_i}\right| < G_n. \end{cases}$$

Из сказанного ясно, что G_n ограничено и что при всяком n

$$G_n < 2a_0$$

Число $2a_0$ мы будем считать бо̀льшим единицы.

Заметим, что все разности (21) и (22) обращаются в нуль при $t = 0$.

Рассмотрим разность

$$(23)\qquad L_n - L_{n-1}.$$

Мы имеем

$$(24)\quad \left|\frac{\partial x_n}{\partial q_i} - \frac{\partial x_{n-1}}{\partial q_i}\right| = \left|\int_0^t \left(\frac{\partial u_n}{\partial q_i} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial q_i}\right) dt\right| < \int_0^t G_n\, dt < G_n t < b_0 G_n$$

и такие же неравенства для производных от разностей $y_{n+1} - y_n$ и $z_{n+1} - z_n$.

Так как разность (23) есть сумма 36 разностей вида

$$\frac{\partial u_n}{\partial q_1}\frac{\partial v_n}{\partial q_2}\frac{\partial z_n}{\partial q_3} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial q_1}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial q_2}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial q_3},$$

то, обозначая $\frac{10}{9}$ через a':

$$|L_n - L_{n-1}| < 36\,\{2a_0 a' G_n + a_0^2 b_0 G_n\} = cG_n$$

и

$$\rho^4 |L_n - L_{n-1}| < cG_n,$$

где c постоянное, не зависящее от n.

7. Изучаем сначала разность

$$u_{n+1} - u_n.$$

Имеем

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \left\{ \int \frac{L_n(\xi_n - x_n)}{r_n^3} d\omega - \int \frac{L_{n-1}(\xi_{n-1} - x_{n-1})}{r_{n-1}^3} d\omega \right\} dt.$$

Но

$$\int \frac{L_n\{\xi_n - x_n\}}{r_n^3} d\omega - \int \frac{L_{n-1}\{\xi_{n-1} - x_{n-1}\}}{r_{n-1}^3} d\omega =$$

$$= \int (L_n - L_{n-1}) \left(\frac{\xi_n - x_n}{r_n^3} \right) d\omega + \int L_{n-1} \left\{ \frac{\xi_n - x_n}{r_n^3} - \frac{\xi_{n-1} - x_{n-1}}{r_{n-1}^3} \right\} d\omega.$$

Вспомнив сказанное в параграфе 3-м главы 3-й, из

$$\xi_n - x_n = p_1 - q_1 + \int_0^t (u_n(p) - u_n(q))\, d\tau, \quad \eta_n - y_n = p_2 - q_2 + \int_0^t (v_n(p) - v_n(q))\, d\tau,$$

$$\zeta_n - z_n = p_3 - q_3 + \int_0^t (w(p) - w_n(q))\, d\tau.$$

положив

$$r = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2},$$

пишем

$$r(1 - 3B_n) < r_n < r(1 + 3B_n), \quad \frac{r^2}{r_n^2} < \frac{1}{(1 - 3B_n)^2} < a_1^2.$$

Отсюда заключаем, что первый интеграл абсолютно меньше

$$(25) \qquad a_1^2 \int |L_n - L_{n-1}| \frac{d\omega}{r^2}.$$

Интеграл (25) того же вида, как рассмотренный в параграфе 3-м главы 3-й, и потому имеем, обратив внимание на примечание в конце того параграфа:

$$a_1^2 \int |L_n - L_{n-1}| \frac{d\omega}{r^2} < a_1^2 ac\, G_n \text{ или } \frac{a_1^2 ac\, G_n}{\rho^2}.$$

Переходим ко второму интегралу.

Имеем

$$\frac{\xi_n - x_n}{r_n^3} - \frac{\xi_{n-1} - x_{n-1}}{r_{n-1}^3} = [(\xi_n - x_n) - (\xi_{n-1} - x_{n-1})] \left. \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \right|_1 +$$

$$+ [(\eta_n - y_n) - (\eta_{n-1} - y_{n-1})] \left. \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \right|_1 + [(\zeta_n - z_n) - (\zeta_{n-1} - z_{n-1})] \left. \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \right|_1,$$

где значок (1) показывает, что значения производных вычислены в точке M_1, координаты которой:

$$(26)\quad \begin{cases} \xi_{n-1}-x_{n-1}+\theta\left[(\xi_n-x_n)-(\xi_{n-1}-x_{n-1})\right]=\vartheta(\xi_{n-1}-x_{n-1})+\theta(\xi_n-x_n)= \\ =\vartheta\left(p_1-q_1+\int\limits_0^t\left(u_{n-1}(p)-u_{n-1}(q)\right)dt\right)+\theta\left(p_1-q_1+\int\limits_0^t\left(u_n(p)-u_n(q)\right)dt\right), \\ \vartheta+\theta=1,\quad \vartheta>0,\quad \theta>0; \\ \vartheta\left(p_2-q_2+\int\limits_0^t\left(v_{n-1}(p)-v_{n-1}(q)\right)dt\right)+\theta\left(p_2-q_2+\int\limits_0^t\left(v_n(p)-v_n(q)\right)dt\right), \\ \vartheta\left(p_3-q_3+\int\limits_0^t\left(w_{n-1}(p)-w_{n-1}(q)\right)dt\right)+\theta\left(p_3-q_3+\int\limits_0^t\left(w_n(p)-w_n(q)\right)dt\right). \end{cases}$$

Мы показали в параграфе 9-м главы 1-й, что координаты точки M_1 обращаются все в нуль только тогда, когда

$$p_1=q_1,\quad p_2=q_2,\quad p_3=q_3,$$

если, конечно, $B<\frac{1}{3}$, что наверное справедливо, если соблюдено неравенство (17).

Так как

$$\left|\vartheta\int\limits_0^t\left(u_{n-1}(p)-u_{n-1}(q)\right)dt+\theta\int\limits_0^t\left(u_n(p)-u_n(q)\right)dt\right|<\sqrt{3}\,\vartheta Br+\sqrt{3}\,\theta Br=\sqrt{3}\,Br$$

и те же неравенства справедливы для разностей, содержащих v и w, опять имеем:

$$(27)\qquad \frac{r}{r_1}<a_1.$$

Далее,

$$(\xi_n-x_n)-(\xi_{n-1}-x_{n-1})=\int\limits_0^t\left(u_n(p)-u_n(q)\right)dt-\int\limits_0^t\left(u_{n-1}(p)-u_{n-1}(q)\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^t\left[\left(u_n(p)-u_{n-1}(p)\right)-\left(u_n(q)-u_{n-1}(q)\right)\right]dt.$$

Из доказанного в параграфе 4-м главы 1-й и из заданий параграфа 6-го вытекает, что где бы ни лежали точки (q_1, q_2, q_3) и (p_1, p_2, p_3), всегда

$$|(u_n(p) - u_{n-1}(p)) - (u_n(q) - u_{n-1}(q))| < \sqrt{3}\, r\, G_n$$

и, значит,

$$(28) \qquad |(\xi_n - x_n) - (\xi_{n-1} - x_{n-1}) < \sqrt{3}\, r \int_0^t G_n\, dt < \sqrt{3}\, r b_0\, G_n.$$

Такие же неравенства справедливы для разностей

$$(\eta_n - y_n) - (\eta_{n-1} - y_{n-1}), \quad (\zeta_n - z_n) - (\zeta_{n-1} - z_{n-1}),$$

откуда заключаем, что

$$\left|\frac{\xi_n - x_n}{r_n^3} - \frac{\xi_{n-1} - x_{n-1}}{r_{n-1}^3}\right| < 3\sqrt{3}\, b_0\, G_n \frac{r \cdot 4}{r_1^3} < \frac{a_1' G_n}{r^2}$$

и что второй интеграл абсолютно меньше интеграла

$$a_1' G_n \int |L_{n-1}| \frac{d\omega}{r^2},$$

рассмотренного в параграфе 3-м главы 3-й и, значит, меньше, пользуясь сказанным в параграфе 4-м,

$$a_1' a\, G_n \text{ или } \frac{a_1' a\, G_n}{\rho^2}.$$

Сказанное приведет к заключению, что

$$(29) \quad |u_{n+1} - u_n| < b \int_0^t G_n\, dt, \ldots, \quad \rho^2 |u_{n+1} - u_n| < b \int_0^t G_n\, dt, \ldots,$$

b не зависит от n.

8. Переходя к изучению разностей

$$(30) \qquad \frac{\partial u_{n+1}}{\partial q_i} - \frac{\partial u_n}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial v_{n+1}}{\partial q_i} - \frac{\partial v_n}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial w_{n+1}}{\partial q_i} - \frac{\partial w_n}{\partial q_i},$$

замечаем, что

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial q_i}-\frac{\partial u_n}{\partial q_i}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t\left\{\left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial q_i}+\frac{\partial U_n}{\partial y_n}\cdot\frac{\partial y_n}{\partial q_i}+\frac{\partial U_n}{\partial z_n}\cdot\frac{\partial z_n}{\partial q_i}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\cdot\frac{\partial x_{n-1}}{\partial q_i}+\frac{\partial U_{n-1}}{\partial y_{n-1}}\cdot\frac{\partial y_{n-1}}{\partial q_i}+\frac{\partial U_{n-1}}{\partial z_{n-1}}\cdot\frac{\partial z_{n-1}}{\partial q_i}\right)\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t\left\{\frac{\partial U_n}{\partial x_n}\left(\frac{\partial x_n}{\partial q_i}-\frac{\partial x_{n-1}}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial U_n}{\partial y_n}\left(\frac{\partial y_n}{\partial q_i}-\frac{\partial y_{n-1}}{\partial q_i}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial U_n}{\partial z_n}\left(\frac{\partial z_n}{\partial q_i}-\frac{\partial z_{n-1}}{\partial q_i}\right)\right\}dt+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t\left\{\left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n}-\frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)\frac{\partial x_{n-1}}{\partial q_i}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial U_n}{\partial y_n}-\frac{\partial U_{n-1}}{\partial y_{n-1}}\right)\frac{\partial y_{n-1}}{\partial q_i}+\left(\frac{\partial U_n}{\partial z_n}-\frac{\partial U_{n-1}}{\partial z_{n-1}}\right)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial q_i}\right\}dt.$$

Пользуясь неравенствами (24), видим, что первый интеграл по абсолютной величине меньше

$$\frac{3\,.\,b_0\,bc\,a_0^2}{4\pi}\int\limits_0^t G_n\,dt=a'\int\limits_0^t G_n dt,$$

где b число, встречавшееся в параграфе 12-м главы 3-й, не зависящее от n.

Значит, для оценки разностей (30) надо оценить разности

$$\frac{\partial U_n}{\partial x_n}-\frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_{n-1}},\;\ldots,\;\frac{\partial W_n}{\partial z_n}-\frac{\partial W_{n-1}}{\partial z_{n-1}}. \tag{30'}$$

9. Положим $M_0(q_1, q_2, q_3)$ точка, не лежащая на границе, расстояние которой от границы 2δ.

Опишем около точки M_0 сферу, радиус которой δ_0, где

$$\delta_0\leqq\delta,\ \text{если}\ \delta<G_n$$

и где

$$\delta_0=G_n,\ \text{если}\ \delta\geqq G_n.$$

Для составления значений производных (30') в точке M_0 пользуемся формулами параграфа 9-го главы 3-й и ограничиваемся, ввиду полной аналогии, составлением производных

$$\frac{\partial U_n}{\partial x_n},\quad\frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_{n-1}}.$$

Преобразуем интеграл U_n к переменным интегрирования ξ, η, ζ по формулам:

$$(31)\quad \xi = p_1 + \int_0^t u_n(p_1, p_2, p_3, \tau)\,dt,\ \ \eta = p_2 + \int_0^t v_n(p)\,dt,\ \ \zeta = p_3 + \int_0^t w_n(p)\,dt.$$

Если только-что построенная сфера преобразуется в поверхность (D_n), то принимаем за область (D) параграфа 9-го область, ограниченную поверхностью (D_n).

Если

$$J_n = \left|\frac{\partial x_n}{\partial q_1},\quad \frac{\partial y_n}{\partial q_2},\quad \frac{\partial z_n}{\partial q_3}\right|,$$

то

$$(32)\left\{\begin{aligned} \frac{\partial U_n}{\partial x_n} &= \frac{L_n^0}{J_n^0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{(D_n)}\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}\Bigg|_{\substack{x=x_n\\ y=y_n\\ z=z_n}} + \\ &+ \int_{(D_n)}\left(\frac{L_n}{J_n} - \frac{L_n^0}{J_n^0}\right)\left\{\frac{3(\xi - x_n)^2}{r_n^5} - \frac{1}{r_n^3}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta + \int_{(R-D_n)}\frac{L_n}{J_n}\left\{\frac{3(\xi - x_n)^2}{r_n^5} - \frac{1}{r_n^3}\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta;\end{aligned}\right.$$

значок (0) показывает, что функции вычислены в точке M_0;

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

Уравнение (D_n) получаем, положив в (31):

$$(33)\quad p_1 = q_1 + \delta_0\sin\theta\cos\varphi,\quad p_2 = q_2 + \delta_0\sin\theta\sin\varphi,\quad p_3 = q_3 + \delta_0\cos\theta.$$

Для составления значений другой производной преобразуем интеграл U_{n-1} к переменным интегрирования ξ, η, ξ по формулам:

$$(31')\left\{\begin{aligned} &\xi = p_1 + \int_0^t u_{n-1}(p_1, p_2, p_3, \tau)\,d\tau,\ \ \eta = p_2 + \int_0^t v_{n-1}(p)\,d\tau,\\ &\zeta = p_3 + \int_0^t w_{n-1}(p)\,d\tau.\end{aligned}\right.$$

Если только-что построенная сфера преобразуется в поверхность (D_{n-1}), то принимаем за область (D) параграфа 9-го область, ограниченную поверхностью (D_{n-1}).

Положив

$$J_{n-1} = \left| \frac{\partial x_{n-1}}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial y_{n-1}}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial z_{n-1}}{\partial q_3} \right|,$$

получаем:

$$(32')\left\{\begin{aligned} \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = {} & \frac{L^0_{n-1}}{J^0_{n-1}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_{(D_{n-1})} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} \Bigg|_{\substack{x = x_{n-1}\\ y = y_{n-1}\\ z = z_{n-1}}} + \\ & + \int\limits_{(D_{n-1})} \left(\frac{L_{n-1}}{J_{n-1}} - \frac{L^0_{n-1}}{J^0_{n-1}} \right) \left\{ \frac{3(\xi - x_{n-1})^2}{r^3_{n-1}} - \frac{1}{r^3_{n-1}} \right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta + \\ & + \int\limits_{(R-D_{n-1})} \frac{L_{n-1}}{J_{n-1}} \left\{ \frac{3(\xi - x_{n-1})^2}{r^3_{n-1}} - \frac{1}{r^3_{n-1}} \right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta. \end{aligned}\right.$$

Значок (0) опять показывает, что функции вычислены в точке M_0.

Уравнение (D_{n-1}) получаем, подставив в $(31')$ вместо p_1, p_2, p_3 значения (33).

Сравниваем почленно слагаемые в (32) и (32′).

10. Сравнение первых дает

$$\frac{L_n^0}{J_n^0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_{(D_n)} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} \Bigg|_{\substack{x = x_n\\ y = y_n\\ z = z_n}} - \frac{L^0_{n-1}}{J^0_{n-1}} \int\limits_{(D_{n-1})} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} \Bigg|_{\substack{x = x_{n-1}\\ y = y_{n-1}\\ z = z_{n-1}}} = \left(\frac{L_n^0}{J_n^0} - \frac{L^0_{n-1}}{J^0_{n-1}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_{(D_n)} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} \Bigg|_{\substack{x = x_n\\ y = y_n\\ z = z_n}} +$$

$$+ \frac{L^0_{n-1}}{J^0_{n-1}} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_{(D_n)} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} \Bigg|_{\substack{x=x_n\\ y=y_n\\ z=z_n}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_{(D_{n-1})} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} \Bigg|_{\substack{x = x_{n-1}\\ y = y_{n-1}\\ z = z_{n-1}}} \right\}.$$

Легко убеждаемся, что

$$\left| \frac{L_n^0}{J_n^0} - \frac{L^0_{n-1}}{J^0_{n-1}} \right| < a'' G_n \text{ или } < \frac{a'' G_n}{\rho_0^4};$$

действительно,

$$\frac{L_n^0}{J_n^0} - \frac{L^0_{n-1}}{J^0_{n-1}} = \frac{1}{J_n^0 J^0_{n-1}} \left[(L_n^0 - L^0_{n-1}) J^0_{n-1} - L^0_{n-1} (J_n^0 - J^0_{n-1}) \right],$$

причем

$$|J_n^0 - J^0_{n-1}| < b' G_n.$$

Интегральный множитель в первом слагаемом ограничен. Он равен

$$\int\limits_{\text{пов}(D_n)} \cos Nx \frac{\xi - x_n}{r_n^3} d\sigma,$$

где интегрирование распространено по поверхности (D_n).

Пользуясь формулами параграфа 12-го главы 1-й, видим, что после возвращения к старым переменным он обращается в

$$\int\limits_{\text{пов}(\delta_0)} \left(\cos Nq_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_n} + \cos Nq_2 \frac{\partial q_2}{\partial x_n} + \cos Nq_3 \frac{\partial q_3}{\partial x_n} \right) J_n \frac{\xi_n - x_n}{r_n^3} d\sigma_0,$$

где $d\sigma_0$ элемент поверхности сферы.

Но

$$\left| \frac{\xi_n - x_n}{r_n^3} \right| < \frac{1}{r_n^2} < \frac{a_1^2}{r^2} = \frac{a_1^2}{\delta_0^2},$$

и интеграл абсолютно меньше числа вида

$$\frac{a_1^2 a'}{\delta_0^2} \int\limits_{\text{пов}(\delta_0)} d\sigma_0 = \frac{4\pi \delta_0^2 a_1^2 a'}{\delta_0^2} = 4\pi a_1^2 a',$$

где число a' определяется неравенствами параграфа 7-го главы 1-й и не зависит от n.

Для оценки второго слагаемого, введем в первый интеграл вместо $\xi, \eta, \zeta, x, y, z$ аргументы

$$\xi - x_n(q) + x_{n-1}(q), \quad \eta - y_n(q) + y_{n-1}(q), \quad \zeta - z_n(q) + z_{n-1}(q).$$
$$x - x_n(q) + x_{n-1}(q), \quad y - y_n(q) + y_{n-1}(q), \quad z - z_n(q) + z_{n-1}(q).$$

Тогда уравнениями поверхности (D_n) будут

$$\xi^{(1)} = p_1 + \int_0^t \left(u_n(p) - u_n(q) + u_{n-1}(q)\right) dt,$$

$$\eta^{(1)} = p_2 + \int_0^t \left(v_n(p) - v_n(q) + v_{n-1}(q)\right) dt,$$

$$\zeta^{(1)} = p_3 + \int_0^t \left(w_n(p) - w_n(q) + w_{n-1}(q)\right) dt,$$

а уравнениями (D_{n-1})

$$\xi^{(2)} = p_1 + \int_0^t u_{n-1}(p)\,dt, \quad \eta^{(2)} = p_2 + \int_0^t v_{n-1}(p)\,dt, \quad \zeta^{(2)} = p_3 + \int_0^t w_{n-1}(p)\,dt,$$

причем в них

$$(33) \quad p_1 = q_1 + \delta_0 \sin\theta\cos\varphi, \quad p_2 = q_2 + \delta_0 \sin\theta \sin\varphi, \quad p_3 = q_3 + \delta_0 \cos\theta,$$
$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq \theta < \pi.$$

Точки внутри (D_n) и (D_{n-1}), соответствующие M_0, теперь совпадают. Разность интегралов становится равной

$$(34) \qquad \int\limits_{(D_n\, D_{n-1})} \left\{ \frac{3(\xi - x_{n-1})^2}{\rho^5} - \frac{1}{\rho^3} \right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где

$$\rho^2 = (\xi - x_{n-1})^2 + (\eta - y_{n-1})^2 + (\zeta - z_{n-1})^2$$

и где интегрирование распространено по области, ограниченной поверхностями (D_n) и (D_{n-1}), причем интегралы по некоторым частям области взяты со знаком $(+)$, а по некоторым со знаком $(-)$.

Введем теперь переменные интегрирования по формулам $(31')$; поверхность (D_{n-1}) обратится в сферу радиуса δ_0 с центром в M_0, а (D_n) в некоторую поверхность (D'_n), уравнения которой в координатах (p'_1, p'_2, p'_3) даны формулами

$$p_1 + \int_0^t u_{n-1}(p)\,dt = p_1' + \int_0^t \big(u_n(p') - u_n(q) + u_{n-1}(q)\big)\,dt,$$

$$p_2 + \int_0^t v_{n-1}(p)\,dt = p_2' + \int_0^t \big(v_n(p') - v_n(q) + v_{n-1}(q)\big)\,dt,$$

$$p_3 + \int_0^t w_{n-1}(p)\,dt = p_3' + \int_0^t \big(w_n(p') - w_n(q) + w_{n-1}(q)\big)\,dt,$$

которым можно дать вид:

$$p_1' - p_1 + \int_0^t (u_n(p') - u_n(p))\, dt = \xi^{(2)} - \xi^{(1)},$$

$$p_2' - p_2 + \int_0^t (v_n(p') - v_n(p))\, dt = \eta^{(2)} - \eta^{(1)},$$

$$p_3' - p_3 + \int_0^t (w_n(p') - w_n(p))\, dt = \zeta^{(2)} - \zeta^{(1)}.$$

Правые части последних уравнений абсолютно меньше числа вида

$$a\delta_0 G_n;$$

например,

$$\xi^{(2)} - \xi^{(1)} = \int_0^t ((u_{n-1}(p) - u_n(p)) - (u_{n-1}(q) - u_n(q))\, dt,$$

и существование производных у функции

$$u_{n-1}(q) - u_n(q)$$

в связи с неравенствами (22) непосредственно говорит, что высказанное утверждение справедливо. Установив это, из полученных неравенств заключаем, что

$$|p_1' - p_1| - \sqrt{3}\, B\rho_0 < a\delta_0 G_n, \quad |p_2' - p_2| - \sqrt{3}\, B\rho_0 < a\delta_0 G_n,$$
$$|p_3' - p_3| - \sqrt{3}\, B\rho_0 < a\delta_0 G_n,$$

где

$$\rho_0^2 = (p_1' - p_1)^2 + (p_2' - p_2)^2 + (p_3' - p_3)^2,$$

что приводит к неравенствам

$$\rho_0^2 < 3\,(a\delta_0 G_n + \sqrt{3}\, B\rho_0)^2, \quad \rho_0 < \sqrt{3}\,(a\delta_0 G_n + \sqrt{3}\, B\rho_0),$$
$$\rho_0 < \frac{\sqrt{3}\, a\delta_0 G_n}{1 - 3B} < \frac{3\sqrt{3}\, a\delta_0 G_n}{2}.$$

Итак, так как

$$|p_1' - p_1| < \rho_0, \quad |p_2' - p_2| < \rho_0, \quad |p_3' - p_3| < \rho_0,$$

мы имеем

$$(35) \quad p_1' = p_1 + R_1 \delta_0 G_n, \quad p_2' = p_2 + R_2 \delta_0 G_n, \quad p_3' = p_3 + R_3 \delta_0 G_n, \quad R_i < R,$$

где R некоторое число.

Ищем теперь точку пересечения

$$(q_1 + \delta_1 \sin\theta_0 \cos\varphi_0, \quad q_2 + \delta_1 \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \quad q_3 + \delta_1 \cos\theta_0)$$

поверхности (D'_n) с прямой

$$p_1' = q_1 + \delta \sin\theta_0 \cos\varphi_0, \quad p_2' = q_2 + \delta \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \quad p_3' = q_3 + \delta \cos\theta_0.$$

Мы получаем:

$$(\delta_1 - \delta_0) \sin\theta_0 \cos\varphi_0 = R_1 \delta_0 G_n, \quad (\delta_1 - \delta_0) \sin\theta_0 \sin\varphi_0 = R_2 \delta_0 G_n,$$
$$(\delta_1 - \delta_0) \cos\theta_0 = R_3 \delta_0 G_n$$

и

$$|\delta_1 - \delta_0| < a\delta_0 G_n.$$

Отсюда вытекает, что область между поверхностью (D'_n) и сферой (δ_0) заключается между двумя концентрическими сферами, расстояние которых от (δ_0) равно $k\delta_0$, где k меньше aG_n.

Так как расстояние точки (x_n, y_n, z_n) от (D_n), так же как и расстояние $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ от (D_{n-1}), нигде не меньше чем

$$\delta_0(1 - 3B) > \frac{2}{3}\delta_0,$$

и Якобиан J_{n-1} не превосходит числа $\frac{3}{2}$, то функция под знаком интеграла абсолютно меньше чем

$$\frac{6}{\left(\frac{2}{3}\delta_0\right)^3}.$$

Из этого ясно, что, вследствие ограниченности G_n, сам интеграл абсолютно меньше числа вида

$$\frac{6}{\left(\frac{2}{3}\delta_0\right)^3} \frac{4\pi}{3} \delta_0^3 [(1 + k)^3 - (1 - k)^3] < a_{\prime\prime} G_n$$

где $a_{\prime\prime}$ не зависит от n.

Так как L^0_{n-1} и $\rho_0^4 L^0_{n-1}$ ограничены, из всего сказанного ясно, что разность между первыми слагаемыми формул (32) меньше числа вида

$$a\,G_n \text{ или } \frac{a\,G_n}{\rho_0^4},$$

где a не зависит от n.

11. Изучая разности между остальными слагаемыми, мы предпочтем изменить переменные интегрирования, взяв за них снова p_1, p_2, p_3.

Тогда разность между вторыми слагаемыми равна

$$\int\limits_{(\delta_0)} \left(L_n - \frac{L_n^0}{J^0_n} J_n\right) \left\{\frac{3(\xi_n - x_n)^2}{r_n^5} - \frac{1}{r_n^3}\right\} d\omega -$$

$$-\int\limits_{(\delta_0)} \left(L_{n-1} - \frac{L^0_{n-1}}{J^0_{n-1}} J_{n-1}\right) \left\{\frac{3(\xi_{n-1} - x_{n-1})^2}{r^5_{n-1}} - \frac{1}{r^3_{n-1}}\right\} d\omega =$$

$$=\int\limits_{(\delta_0)} \left[\left(L_n - \frac{L_n^0}{J_n^0} J_n\right) - \left(L_{n-1} - \frac{L^0_{n-1}}{J^0_{n-1}} J_{n-1}\right)\right] \left\{\frac{3(\xi_n - x_n)^2}{r_n^5} - \frac{1}{r_n^3}\right\} d\omega +$$

$$+\int\limits_{(\delta_0)} \left(L_{n-1} - \frac{L^0_{n-1}}{J^0_{n-1}} J_{n-1}\right) \left[\left\{\frac{3(\xi_n - x_n)^2}{r_n^5} - \frac{1}{r_n^3}\right\} - \left\{\frac{3(\xi_{n-1} - x_{n-1})^2}{r^5_{n-1}} - \frac{1}{r^3_{n-1}}\right\}\right] d\omega.$$

Первый множитель под знаком первого интеграла обозначим временно одной буквой T. Имеем:

$$T = L_n - L_{n-1} - \frac{1}{J_n^0 J^0_{n-1}} \{(L_n^0 - L^0_{n-1}) J_n J^0_{n-1} +$$

$$+ L^0_{n-1}(J_n - J_{n-1}) J^0_{n-1} + L^0_{n-1} J_{n-1} (J_n^0 - J^0_{n-1})\},$$

откуда ясно, что

(36) $$|T| < g\,G_n \text{ или } < g\,\frac{G_n}{\rho_0^4}.$$

Именно,

$$|L_n - L_{n-1}| < \frac{c\,G_n}{\rho^4} \text{ и } \rho > \rho_0 - \delta_0,$$

откуда

$$\frac{1}{\rho^4} < \frac{1}{(\rho_0 - \delta_0)^4} < \frac{a'}{\rho_0^4}$$

при больших значениях ρ_0.

Далее ясно, что

(36′) $$|T| < h\,r^{1-\lambda} \text{ или } < \frac{h\,r^{1-\lambda}}{\rho_0^4},$$

так как

$$\left|L_n - \frac{L_n^0}{J_n^0} J_n\right| \quad \text{и} \quad \left|L_{n-1} - \frac{L^0_{n-1}}{J^0_{n-1}} J_{n-1}\right|$$

обладают этим свойством.

Возведя (36) в степень $n-1$ и помножив на (36′), получаем:

$$|T|^n < g^{n-1} h\, G_n^{\;n-1} r^{1-\lambda} \quad \text{или} < \frac{g^{n-1} h\, G_n^{\;n-1} r^{1-\lambda}}{\rho_0^{4n}}$$

и

$$(37) \qquad |T| < g^{\frac{n-1}{n}} h^{\frac{1}{n}} G_n^{\frac{n-1}{n}} r^{\frac{1-\lambda}{n}} < c\, G_n^{\frac{n-1}{n}} r^{\frac{1-\lambda}{n}} \quad \text{или} < \frac{c\, G_n^{\frac{n-1}{n}} r^{\frac{1-\lambda}{n}}}{\rho_0^4},$$

где c некоторое число, не зависящее от n; предел $g^{\frac{n-1}{n}} h^{\frac{1}{n}}$ равен, именно, g при $n = \infty$.

Заметив это, примем во внимание, что, сохраняя обозначения параграфа 7-го:

$$\left|\frac{3(\xi_n - x_n)^2}{r_n^5} - \frac{1}{r_n^3}\right| < \frac{4}{r_n^3} < \frac{4a_1^3}{r^3}.$$

Вследствие этого, первый интеграл абсолютно меньше

$$4a_1^3\, c\, G_n^{\frac{n-1}{n}} . 4\pi \int_0^{\delta_0} \frac{r^{\frac{1-\lambda}{n}} r^2\, dr}{r^3} = \frac{16\pi a_1^3\, c\, G_n^{\frac{n-1}{n}}}{\left(\frac{1-\lambda}{n}\right)} \delta_0^{\frac{1-\lambda}{n}} = a_2 n\, G_n^{\frac{n-1}{n}} \delta_0^{\frac{1-\lambda}{n}}.$$

Так как

$$\delta_0 \leqq G_n,$$

то первый интеграл меньше числа

$$(38) \qquad a_2 n\, G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} \quad \text{или} \quad \frac{a_2 n\, G_n^{1-\frac{\lambda}{n}}}{\rho_0^4},$$

в котором a_2 уже от n не зависит.

Переходя к оценке второго интеграла, отмечаем, что квадратная скобка равна

$$[(\xi_n - x_n) - (\xi_{n-1} - x_{n-1})] \frac{\partial^3}{\partial x^3} \cdot \frac{1}{r}\Big|_1 + [(\eta_n - y_n) - (\eta_{n-1} - y_{n-1})] \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \frac{1}{r}\Big|_1 +$$
$$+ [(\zeta_n - z_n) - (\zeta_{n-1} - z_{n-1})] \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} \cdot \frac{1}{r}\Big|_1,$$

где производные вычислены в точке M_1, координаты которой даны формулами (26).

Так как значения третьих производных меньше

$$\frac{24}{r_1^4},$$

то пользуясь формулами (27) и (28), получаем, что квадратная скобка меньше

$$\frac{3\sqrt{3}\, r\, b_0\, G_n \,.\, 24\, a_1^4}{r^4} = a_2{}' \frac{G_n}{r^3}.$$

где a_2' число, не зависящее от n.

Так как, как уже указано,

$$\left| L_{n-1} - \frac{L^0_{n-1}}{J^0_{n-1}} J_{n-1} \right| < h' r^{1-\lambda} \text{ или } < \frac{h' r^{1-\lambda}}{\rho_0^4},$$

где h' не зависит от n, то оставшийся интеграл меньше

$$4\pi h' a_2' G_n \int_0^{\delta_0} \frac{r^{1-\lambda} r^2\, dr}{r^3} = \frac{4\pi h' a_2'}{1-\lambda} G_n \delta_0^{1-\lambda} < a_3 G_n \text{ или } < \frac{a_3 G_n}{\rho_0^4}.$$

Замечая, что отношение

$$(39) \qquad \frac{a_3 G_n}{a_2 n G_n^{1-\frac{\lambda}{n}}} = \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{G_n^{\frac{\lambda}{n}}}{n},$$

вследствие заведомой ограниченности G_n, ограничено, заключаем, что разность между вторыми слагаемыми формул (32) абсолютно меньше числа вида

$$a n G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} \text{ или } \frac{a n G_n^{1-\frac{\lambda}{n}}}{\rho_0^4}.$$

в котором a не зависит от n.

12. Разность между третьими слагаемыми равна

$$\int\limits_{(R-\delta_0)} L_n \left\{ \frac{3(\xi_n - x_n)^2}{r_n^5} - \frac{1}{r_n^3} \right\} d\omega - \int\limits_{(R-\delta_0)} L_{n-1} \left\{ \frac{3(\xi_{n-1} - x_{n-1})^2}{r^5_{n-1}} - \frac{1}{r^3_{n-1}} \right\} d\omega =$$

$$= \int\limits_{(R-\delta_0)} (L_n - L_{n-1}) \left\{ \frac{3(\xi_n - x_n)^2}{r_n^5} - \frac{1}{r_n^3} \right\} d\omega +$$

$$+ \int\limits_{(R-\delta_0)} L_{n-1} \left[\left\{ \frac{3(\xi_n - x_n)^2}{r_n^5} - \frac{1}{r_n^3} \right\} - \left\{ \frac{3(\xi_{n-1} - x_{n-1})^2}{r^5_{n-1}} - \frac{1}{r^3_{n-1}} \right\} \right] d\omega.$$

Для оценки первого интеграла, возьмем его сначала по сфере некоторого радиуса Δ, где $\Delta > 1$.

Получаем, что он абсолютно меньше

$$4 \cdot 4\pi c G_n \int_{\delta_0}^{\Delta} \frac{r^2 dr}{r_n^3} < 16\pi a_1^3 c G_n \int_{\delta_0}^{\Delta} \frac{dr}{r} = 16\pi a_1^3 c G_n (\log \Delta - \log \delta_0).$$

Замечаем, что, при $\delta_0 < 1$, произведение

$$-\delta_0^{\frac{\lambda}{n}} \log \delta_0$$

имеет наибольшее значение при $\delta_0 = e^{-\frac{n}{\lambda}}$ и что это наибольшее значение равно

$$\frac{n}{\lambda e}.$$

Если

$$\delta \geqq G_n, \text{ то } \delta_0 = G_n;$$

если, при этом, $G_n < 1$, то

$$a_2 G_n |\log G_n| = a_2 G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} \cdot G_n^{\frac{\lambda}{n}} |\log G_n| < n a_2' G_n^{1-\frac{\lambda}{n}}.$$

Значит, пока

$$\delta < G_n,$$

изучаемый интеграл вида

$$a_2 G_n |\log \delta_0| \text{ или } \frac{a_2 G_n |\log \delta_0|}{\rho_0^4};$$

если же

$$\delta > G_n,$$

то интеграл вида

$$a_2 G_n \text{ или } \frac{a_2 G_n}{\rho_0^4},$$

пока $G_n > 1$, и вида

$$n a_2 G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} \text{ или } \frac{n a_2 G_n^{1-\frac{\lambda}{n}}}{\rho_0^4},$$

если $G_n < 1$.

Повторение сказанного в конце параграфа 12-го главы 3-й с заменою

$$N \text{ на } c G_n$$

приводит к заключению, что не оцененный еще интеграл

$$\int\limits_{(R-\Delta)} (L_n - L_{n-1}) \left\{ \frac{3(\xi_n - x_n)^2}{r_n^5} - \frac{1}{r_n^3} \right\} d\omega$$

меньше

$$bc\, G_n \text{ или } \frac{bc\, G_n}{\rho_0^3}.$$

Переходя к оставшемуся интегралу и пользуясь сказанным в параграфе 11-м, видим, что его квадратная скобка меньше

$$\frac{a_2' G_n}{r^3}$$

и сам он абсолютно меньше

$$a_2' G_n \int\limits_{(R-\delta_0)} \frac{|L_{n-1}|\, d\omega}{r^3}.$$

Оценивая его, как и только-что рассмотренный интеграл, сначала по сфере радиуса Δ, а потом по остальной части пространства, убеждаемся, что он не превосходит числа вида

$$a_3 G_n |\log \delta_0| + a_3 G_n \text{ или } \frac{a_3 G_n |\log \delta_0| + a_3 G_n}{\rho_0^3},$$

если

$$\delta < G_n,$$

и числа вида

$$a_3 n\, G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} + a_3 G_n \text{ или } \frac{a_3 n\, G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} + a_3 G_n}{\rho_0^3},$$

если

$$\delta > G_n \text{ при } G_n < 1,$$

числа вида

$$a_3 G_n \text{ или } \frac{a_3 G_n}{\rho_0^3}$$

при

$$\delta > G_n \text{ и } G_n > 1.$$

Следовательно, разность между последними интегралами вида

$$a_2 G_n |\log \delta_0| \text{ или } \frac{a_2 G_n |\log \delta_0|}{\rho_0^3},$$

если

$$\delta < G_n,$$

и, вспоминая сказанное об отношении (39), вида

$$a_2 n G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} \text{ или } \frac{a_2 n G_n^{1-\frac{\lambda}{n}}}{\rho_0^3},$$

если

$$\delta \geqq G_n.$$

13. Резюмируя сказанное в параграфах 10, 11, 12, получаем, что разности (30) не превосходят числа вида

$$(40) \qquad a' \int_0^t G_n |\log \delta_0| \, dt \text{ или } \frac{a'}{\rho_0^3} \int_0^t G_n |\log \delta_0| \, dt,$$

если

$$\delta < G_n,$$

и числа вида

$$(41) \qquad an \int_0^t G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} dt \text{ или } \frac{an}{\rho_0^3} \int_0^t G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} dt,$$

если

$$\delta \geqq G_n.$$

Смотря по значениям n, δ_0, G_n, может быть бо́льшим то то, то другое.

Вспоминая формулы (29), заключаем, что следует для G_{n+1} брать ту из формул

$$(40') \qquad G_{n+1} = a \int_0^t G_n |\log \delta| \, dt,$$

$$(41') \qquad G_{n+1} = an \int_0^t G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} dt,$$

в правой части которой стоит большее число. При всем этом всегда можно положить

$$G_{n+1} = 2a_0.$$

Положим, что число m удовлетворяет неравенствам:

$$(42) \qquad m > 2a_0 |\log \delta|,$$

$$(42') \qquad m > (a |\log \delta|)^{1+\lambda},$$

и покажем, что при значениях n больших m правая часть (41') всегда больше правой части (40'), если положить

$$G_m = \Gamma = 2a_0.$$

Действительно, прежде всего тогда

$$m(2a_0)^{1-\frac{\lambda}{m}} > 2a_0 |\log \delta|,$$

так как, вследствие (42), последнее неравенство равносильно неравенству

$$(2a_0)^{1-\frac{\lambda}{m}} > 1,$$

справедливому, если $2a_0$ больше единицы, что мы предполагаем.

Положим теперь, что

$$n \geqq m$$

и

$$n\, G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} > G_n |\log \delta|, \quad G_n^{\frac{\lambda}{n}} < \frac{n}{|\log \delta|}.$$

Тогда

$$n\int_0^t G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} dt > \int_0^t G_n |\log \delta| dt$$

и, значит,

$$G_{n+1} = an\int_0^t G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} dt.$$

Докажем, что

$$(n+1)\, G_{n+1}^{1-\frac{\lambda}{n+1}} > G_{n+1} |\log \delta|.$$

Если высказанное утверждение несправедливо, то

$$n+1 < G_{n+1}^{\frac{\lambda}{n+1}} |\log \delta|.$$

Считая, что τ меньше единицы и a больше единицы, из последнего неравенства получаем:

$$n+1 < a^{\frac{\lambda}{n+1}}\, n^{\frac{\lambda}{n+1}} \left(\int_0^t G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} dt\right)^{\frac{\lambda}{n+1}} . |\log \delta| < a^{\frac{\lambda}{n+1}}\, n^{\frac{\lambda}{n+1}} \left(G_n^{1-\frac{\lambda}{n}} \tau\right)^{\frac{\lambda}{n+1}} |\log \delta| =$$

$$= a^{\frac{\lambda}{n+1}}\, n^{\frac{\lambda}{n+1}}\, G_n^{\frac{n-\lambda}{n}\cdot\frac{\lambda}{n+1}}\, \tau^{\frac{\lambda}{n+1}} |\log \delta| < a^{\frac{\lambda}{n+1}}\, n^{\frac{\lambda}{n+1}} \left(G_n^{\frac{\lambda}{n}}\right)^{\frac{n-\lambda}{n+1}} |\log \delta| <$$

$$< a^{\frac{\lambda}{n+1}}\, n^{\frac{\lambda}{n+1}}\, n^{\frac{n-\lambda}{n+1}} \frac{|\log \delta|}{|\log \delta|^{\frac{n-\lambda}{n+1}}} = a^{\frac{\lambda}{n+1}}\, n^{\frac{n}{n+1}} |\log \delta|^{\frac{1+\lambda}{n+1}} < (n+1)^{\frac{n}{n+1}} (a|\log \delta|)^{\frac{1+\lambda}{n+1}},$$

т.-е.

$$(n+1)^{\frac{1}{n+1}} < (a|\log\delta|)^{\frac{1+\lambda}{n+1}}.$$

Последнее неравенство говорит, что

$$n+1 < (a|\log\delta|)^{1+\lambda},$$

что противоречит, при $n \geqq m$, неравенству (42').

Итак, если $n \geqq m$, то

$$G_{n+1} = an\int_0^t G_n^{1-\frac{\lambda}{n}}\,dt.$$

14. Берем какую-нибудь точку $M_0(q_1, q_2, q_3)$, не лежащую на границе.

Обозначим расстояние точки M_0 от границы через δ и найдем число m, удовлетворяющее обоим неравенствам (42).

Обозначим далее через G_1 какое-нибудь число, превышающее абсолютные значения интегралов

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^t U_0\,dt,\quad \frac{1}{4\pi}\int_0^t V_0\,dt,\quad \frac{1}{4\pi}\int_0^t W_0\,dt,$$

и вычисляя

$$G_2, G_3, \ldots, G_m,$$

будем считать, что все они равны $2a_0$.

Положим

$$G_m = \Gamma = 2a_0.$$

Для вычисления

$$G_{m+1},\quad G_{m+2},\quad \ldots$$

придется, как показано, пользоваться формулой (41').

Приступая к этому вычислению, находим

$$G_{m+1} = ma\int_0^t \Gamma^{1-\frac{\lambda}{m}}\,dt = ma\,\Gamma^{1-\frac{\lambda}{m}}\,t = m\Gamma^{1-\frac{\lambda}{m}}(at),$$

$$G_{m+2} = (m+1)\,am^{1-\frac{\lambda}{m+1}}\,\Gamma^{\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)\left(1-\frac{\lambda}{m+1}\right)}\int_0^t (at)^{1-\frac{\lambda}{m+1}}\,dt =$$

$$= \frac{(m+1)\,m^{1-\frac{\lambda}{m+1}}}{2-\frac{\lambda}{m+1}}\,\Gamma^{\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)\left(1-\frac{\lambda}{m+1}\right)}(at)^{2-\frac{\lambda}{m+1}}.$$

Положив

$$G_{m+n} = C(n)(at)^{\varphi(n)}, \tag{43}$$

будем иметь:

$$(44)\begin{cases} \varphi(0)=0,\ \varphi(1)=1,\ \varphi(2)=2-\frac{\lambda}{m+1},\ \cdots, \\ C(0)=\Gamma,\ \ C(1)=m\,\Gamma^{1-\frac{\lambda}{m}},\ C(2)=\frac{(m+1)\,m^{1-\frac{\lambda}{m+1}}}{2-\frac{\lambda}{m+1}}\,\Gamma^{\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)\left(1-\frac{\lambda}{m+1}\right)}, \ldots \end{cases}$$

Из равенства (43), с одной стороны, имеем

$$G_{m+n+1} = C(n+1)(at)^{\varphi(n+1)};$$

с другой стороны,

$$G_{m+n+1} = \frac{(m+n)}{1+\varphi(n)\left(1-\frac{\lambda}{m+n}\right)}\,C(n)^{1-\frac{\lambda}{m+n}}(at)^{1+\varphi(n)\left(1-\frac{\lambda}{m+n}\right)},$$

откуда

$$\varphi(n+1) = 1+\varphi(n)\left(1-\frac{\lambda}{m+n}\right), \tag{45}$$

$$C(n+1) = \frac{m+n}{1+\varphi(n)\left(1-\frac{\lambda}{m+n}\right)}\,C(n)^{1-\frac{\lambda}{m+n}}. \tag{46}$$

Ищем $\varphi(n)$ и $C(n)$ из последних уравнений, руководствуясь их начальными значениями (44).

15. Занимаемся сначала нахождением $\varphi(n)$.

Уравнению (45) удовлетворяет, как нетрудно убедиться, функция

$$\varphi_0(n) = \frac{n+m}{1+\lambda}.$$

Положив

$$\varphi(n) = \frac{n+m}{1+\lambda} + z(n),$$

мы получим для $z(n)$ уравнение

$$z(n+1) = z(n)\left(1-\frac{\lambda}{m+n}\right) \tag{45'}$$

с начальными условиями

$$z_0(0) = -\frac{m}{1+\lambda}, \quad z(1) = -\frac{m-\lambda}{1+\lambda}, \ldots .$$

Решая уравнение (45′), получаем

$$z(n) = z_0\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)\left(1-\frac{\lambda}{m+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda}{m+n-1}\right),$$

что дает окончательно

$$\varphi(n) = \frac{n+m}{1+\lambda} - \frac{m}{1+\lambda}\psi(n), \tag{47}$$

где

$$\psi(n) = \left(1-\frac{\lambda}{m}\right)\left(1-\frac{\lambda}{m+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda}{m+n-1}\right).$$

Так как ряд

$$\frac{\lambda}{m} + \frac{\lambda}{m+1} + \cdots$$

расходящийся, то, по известной теореме,

$$\text{прд}\ \psi(n) = 0 \ \text{ при } \ n = \infty.$$

Из (47), между прочим, находим

$$\text{прд}\ \frac{\varphi(n)}{n+m} = \text{прд}\left(\frac{1}{1+\lambda} - \frac{1}{1+\lambda}\cdot\frac{m}{n+m}\psi(n)\right) = \frac{1}{1+\lambda}, \ \text{при}\ n = \infty. \tag{48}$$

16. Переходим к уравнению (46), которое, после подстановки вместо $\varphi(n)$ его значения, принимает вид

$$C(n+1) = \frac{(m+n)(1+\lambda)}{(m+n+1) - m\psi(n+1)}\cdot C(n)^{1-\frac{\lambda}{m+n}}. \tag{46}$$

Положим в последнем уравнении

$$C(n) = H(n)\Gamma^{\psi(n)}$$

при начальных условиях

$$H(0) = 1, \quad H(1) = m, \quad H(2) = \frac{(m+1)\,m^{1-\frac{\lambda}{m+1}}}{2-\frac{\lambda}{m+1}}, \ \ldots .$$

Неизвестное $H(n)$ удовлетворяет уравнению

$$(49)\qquad H(n+1)=\frac{(m+n)(1+\lambda)}{m+n+1-m\psi(n+1)}H(n)^{1-\frac{\lambda}{m+n}}.$$

Заметим, что

$$(50)\qquad \text{прд}\,\Gamma^{\frac{\psi(n)}{n+m}}=1 \quad \text{при} \quad n=\infty.$$

Приступая к исследованию $H(n)$, вспоминаем теорему, по которой, если $H(n)^{\frac{1}{n}}$ имеет предел, то $\frac{H(n+1)}{H(n)}$ также имеет предел, и тот же самый.

Имеем:

$$\frac{H(n+1)}{H(n)}=\frac{(m+n)(1+\lambda)}{m+n+1-m\psi(n+1)}\cdot\frac{1}{H(n)^{\frac{\lambda}{m+n}}}.$$

Если допустим, что

$$\text{прд}\,H(n)^{\frac{1}{n}}=l,$$

то

$$\text{прд}\,H(n)^{\frac{\lambda}{m+n}}=\text{прд}\left(H(n)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{\lambda n}{m+n}}=l^{\lambda},$$

и, значит,

$$l=\text{прд}\,\frac{H(n+1)}{H(n)}=\frac{1+\lambda}{l^{\lambda}},$$

откуда

$$l=(1+\lambda)^{\frac{1}{1+\lambda}}.$$

Следовательно, если

$$(51)\qquad H(n)^{\frac{1}{n}}$$

имеет предел при $n=\infty$, то

$$(52)\qquad \text{прд}\,H(n)^{\frac{1}{m+n}}=\text{прд}\left(H(n)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+m}}=(1+\lambda)^{\frac{1}{1+\lambda}}.$$

Остается доказать, что переменное (51) имеет предел.

Прежде всего, полагаем

$$H(n)=\alpha(n)(1+\lambda)^{\frac{n+m}{1+\lambda}},\qquad \alpha(0)=(1+\lambda)^{-\frac{m}{1+\lambda}}<1.$$

Получаем, подставляя в (49), для $\alpha(n)$ уравнение

$$(53)\qquad \alpha(n+1)=\frac{m+n}{m+n+1-m\psi(n+1)}\alpha(n)^{1-\frac{\lambda}{m+n}}.$$

Замечаем, что для всех n, начиная с некоторого n_0:

$$\frac{m+n}{m+n+1-m\psi(n+1)}<1,$$

так как

$$\text{прд}\ m\psi(n+1)=0\ \text{при}\ n=\infty.$$

Если $\alpha(n_0)=K$, то

$$\alpha(n_0+1)<K^{1-\frac{\lambda}{m+n_0}},$$

$$\alpha(n_0+2)<K^{\left(1-\frac{\lambda}{m+n_0}\right)\left(1-\frac{\lambda}{m+n_0+1}\right)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

откуда

$$\alpha(n)<K^{\frac{\psi(n)}{\psi(n_0)}}$$

и

$$\alpha(n)^{\frac{1}{n}}<K^{\frac{1}{n}\frac{\psi(n)}{\psi(n_0)}}.$$

Так как предел правой части равен 1, то, каково бы ни было положительное число ε,

(54) $$\text{если}\ n\geqq N_1,\ \text{то}\ \alpha(n)^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon.$$

Так как

$$\text{прд}\ \frac{m+n}{m+n+1-m\psi(n+1)}=1,$$

то, каково бы ни было положительное число η

(55) при $n\geqq n_1$: $$\frac{m+n}{m+n+1-m\psi(n+1)}>1-\eta.$$

Если $\alpha(n_1)=K_1$, то

$$\alpha(n_1+1)>(1-\eta)K_1^{1-\frac{\lambda}{m+n_1}}=(1-\eta)K_1^{\frac{\psi(n_1+1)}{\psi(n_1)}}.$$

Положив вообще

$$\alpha(n_1+k)>(1-\eta)^{\theta(k)}K_1^{\frac{\psi(n_1+k)}{\psi(n_1)}},\quad \theta(1)=1,$$

получим, пользуясь уравнением (53) и неравенством (55):

$$\alpha(n_1+k+1)>(1-\eta)^{1+\theta(k)\left(1-\frac{\lambda}{m+n_1+k}\right)}K_1^{\frac{\psi(n_1+k)}{\psi(n_1)}\left(1-\frac{\lambda}{m+n_1+k}\right)},$$

откуда вытекает:

$$\theta(k+1) = 1 + \theta(k)\left(1 - \frac{\lambda}{m+n_1+k}\right) \text{ при } \theta(1) = 1.$$

Положив

$$\theta(k) = \frac{m+n_1+k}{1+\lambda} + \zeta(k),$$

получим для $\zeta(k)$ уравнение

$$(56) \qquad \zeta(k+1) = \zeta(k)\left(1 - \frac{\lambda}{m+n_1+k}\right)$$

при

$$\zeta(1) = \theta(1) - \frac{m+n_1+1}{1+\lambda} = -\frac{m+n_1-\lambda}{1+\lambda}.$$

Из уравнения (56) имеем:

$$\zeta(k) = \zeta(1)\left(1 - \frac{\lambda}{m+n_1+1}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{m+n_1+2}\right)\cdots\left(1 - \frac{\lambda}{m+n_1+k-1}\right) =$$

$$= -\frac{m+n_1-\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{\psi(n_1+k)}{\psi(n_1+1)}$$

и

$$\theta(k) = \frac{m+n_1+k}{1+\lambda} - \frac{m+n_1-\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{\psi(n_1+k)}{\psi(n_1+1)}.$$

Значит,

$$\alpha(n_1+k) > (1-\eta)^{\frac{m+n_1+k}{1+\lambda} - \frac{m+n_1-\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{\psi(n_1+k)}{\psi(n_1+1)}} K_1^{\frac{\psi(n_1+k)}{\psi(n_1+1)}},$$

откуда

$$\alpha(n)^{\frac{1}{n}} > (1-\eta)^{\frac{1}{n_1+k}\cdot\frac{m+n_1+k}{1+\lambda} - \frac{1}{n_1+k}\cdot\frac{m+n_1-\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{\psi(n_1+k)}{\psi(n_1+1)}} K_1^{\frac{1}{n_1+k}\cdot\frac{\psi(n_1+k)}{\psi(n_1+1)}}.$$

Так как предел правой части при $n = \infty$ равен $(1-\eta)^{\frac{1}{1+\lambda}}$, то можно выбрать η так, чтобы предел был больше $1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Следовательно,

$$(54') \qquad \text{если } n \geqq N_2, \text{ то } \alpha(n)^{\frac{1}{n}} > 1 - \varepsilon.$$

Значит, каково бы ни было положительное число ε:

если $n \geqq N$, где N некоторое число, $1 - \varepsilon < \alpha(n)^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$

и

$$\text{прд } \alpha(n)^{\frac{1}{n}} = 1 \text{ при } n = \infty.$$

Из доказанного ясно, что (51) имеет предел и что равенство (52) установлено.

17. Возвращаясь к переменным (4), мы видим, что члены рядов (19) и (20) параграфа 5-го, в которых (q_1, q_2, q_3) координаты точки M_0 не на границе, абсолютно меньше членов ряда

$$G_0 + G_1 + \cdots + G_m + \cdots + G_{m+n} + \cdots. \tag{57}$$

Ряд же (57) сходящийся, если t достаточно мало.

Действительно, для него

$$\text{при } n = \infty: \text{прд } G_{m+n}^{\frac{1}{m+n}} = \text{прд } \{H(n)\, \Gamma^{\psi(n)} (at)^{\varphi(n)}\}^{\frac{1}{m+n}} = ((1+\lambda)at)^{\frac{1}{1+\lambda}},$$

как вытекает из формул (48), (50) и (52), и ряд сходится, если

$$0 < (1+\lambda)at < 1, \quad 0 < t < \frac{1}{(1+\lambda)a}. \tag{58}$$

Заметим, что предел сходимости ряда *не зависит* от числа δ, расстояния точки M_0 от границы.

Из сказанного вытекает, что теорему параграфа 5-го можно считать доказанной в ее части, касающейся точек, не расположенных на границе.

Остается принять во внимание точки на границе.

18. Обозначим суммы рядов (19) через

$$u, v, w. \tag{59}$$

Из доказанного вытекает не только сходимость рядов (19) и (20), но и их равномерная сходимость во всякой замкнутой области, не заключающей в себе точек границы.

Из этого следует, что суммы рядов (20) равны производным

$$\frac{\partial u}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial w}{\partial q_i} \tag{60}$$

по q_1, q_2, q_3, от функций (59).

19. Из самого доказательства теоремы вытекает, что

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t} - \frac{\partial u_n}{\partial t}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial t\, \partial q_i} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial t\, \partial q_i} \tag{61}$$

по абсолютной величине меньше чисел вида

$$a G_n |\log \delta_0|, \quad an G_n^{1-\frac{\lambda}{n}},$$

причем, при всех значениях n, начиная с некоторого, меньше именно второго числа.

Так как

$$\text{прд}\, a^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}} G_n^{\frac{1}{n}} G_n^{-\frac{\lambda}{n^2}} = \text{прд}\, G_n^{\frac{1}{n}} = ((1+\lambda) at)^{\frac{1}{1+\lambda}},$$

ясно, что ряды, составленные из функций (61), абсолютно и равномерно сходятся в только-что указанных областях и функции (59), (60) имеют производные по t во всякой точке (q_1, q_2, q_3), не лежащей на границе.

Так как доказательство сходимости рядов из производных (61) основано на сравнении с рядом, совершенно аналогичным ряду (57), в следующих двух параграфах мы ограничимся установлением нужных нам теорем для функций (59) и (60), указав здесь, что они остаются справедливыми и для производных по t от функций (59) и (60).

20. Положим, что точка $M_0(q_1^0, q_2^0, q_3^0)$ лежит на границе.

Выберем произвольно положительное число ε и возьмем точку $M_1(q_1, q_2, q_3)$, не лежащую на границе, положим, со стороны (α) от границы.

Если r_0 расстояние M_1 от M_0, то на основании сказанного в параграфе 3-м, мы можем писать при всяком n

$$|u_n - (u_n)_\alpha| < \sqrt{3}\, r_0 a_0, \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial u_n}{\partial q_i}\right)_\alpha\right| < a_0 r_0^{1-\lambda}.$$

Выбрав точку $M_1(q_1, q_2, q_3)$ настолько близко к M_0, чтобы были соблюдены неравенства

$$\sqrt{3}\, a_0 r_0 < \frac{\varepsilon}{3}, \quad a_0 r_0^{1-\lambda} < \frac{\varepsilon}{3},$$

будем иметь при всяких n и m:

$$|(u_n - u_m) - ((u_n)_\alpha - (u_m)_\alpha)| < \frac{2\varepsilon}{3},$$

$$\left|\left(\frac{\partial u_n}{\partial q_i} - \frac{\partial u_m}{\partial q_i}\right) - \left(\left(\frac{\partial u_n}{\partial q_i}\right)_\alpha - \left(\frac{\partial u_m}{\partial q_i}\right)_\alpha\right)\right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Так как ряды (19) и (20) сходятся в точке M_1, то, если $n \geqq N$, $m \geqq N$, где N некоторое число:

$$|u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial q_i} - \frac{\partial u_m}{\partial q_i}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из последних неравенств выводим, если $n \geqq N$, $m \geqq N$:

$$|(u_n)_\alpha - (u_m)_\alpha| < \varepsilon, \quad \left|\left(\frac{\partial u_n}{\partial q_i}\right)_\alpha - \left(\frac{\partial u_m}{\partial q_i}\right)_\alpha\right| < \varepsilon,$$

откуда ясно, что ряды (19) и (20) остаются сходящимися, когда мы заменим их члены теми пределами, к которым они стремятся, когда точка M приближается к точке M_0 на границе.

Обозначим через $(u)_\alpha \cdots, \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_\alpha, \cdots$ суммы рядов

$$((u_1)_\alpha - (u_0)_\alpha) + ((u_2)_\alpha - (u_1)_\alpha) + \cdots,$$

$$\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial q_i}\right)_\alpha - \left(\frac{\partial u_0}{\partial q_i}\right)_\alpha\right) + \left(\left(\frac{\partial u_2}{\partial q_i}\right)_\alpha - \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_i}\right)_\alpha\right) + \cdots.$$

Вследствие их сходимости, имеем:

$$(u)_\alpha = \text{прд}\,(u_n)_\alpha, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_\alpha = \text{прд}\left(\frac{\partial u_n}{\partial q_i}\right)_\alpha, \quad n = \infty.$$

Выше мы получили, что при всех значениях n:

$$|u_n - (u_n)_\alpha| < \sqrt{3}\, a_0 r_0, \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial u_n}{\partial q_i}\right)_\alpha\right| < a_0 r_0^{1-\lambda}.$$

Переходя в последних неравенствах к пределу, получаем

(62) $$|u - (u)_\alpha| \leqq \sqrt{3}\, a_0 r_0, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_\alpha\right| \leqq a_0 r_0^{1-\lambda}.$$

Из неравенств (62) прежде всего вытекает

$$(u)_\alpha = \text{прд}\, u, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_\alpha = \text{прд}\, \frac{\partial u}{\partial q_i},$$

когда M_1 стремится к M.

Сказанное, конечно, справедливо и для функций v и w.

21. Функции (59) удовлетворяют всем девяти условиям, перечисленным в параграфе 2-м главы 1-й.

(I) Они непрерывны во всем пространстве (Q). После сказанного в прошлых параграфах остается проверить сохранение непрерывности при переходе точки через границу. Каково бы ни было положительное число ε, можно найти две точки M_1 и M_2 по разные стороны границы, для которых разность значений u_n, при всяком n, меньше $\frac{\varepsilon}{3}$:

$$|u_n' - u_n''| < \frac{\varepsilon}{3},$$

где u_n' значение u_n в M_1, а u_n'' значение u_n в M_2, так как эта разность меньше числа вида ar, в котором r расстояние между M_1 и M_2 и a не зависит от n.

Но при всех $n \geqq N$:

$$|u' - u_n'| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |u'' - u_n''| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

откуда ясно, что

$$|u' - u''| < \varepsilon.$$

(II) Так как при всяком n

$$(63) \qquad |u_n| < a_0, \quad \rho |u_n| < a_0, \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial q_i}\right| < a_0, \quad \rho^2 \left|\frac{\partial u_n}{\partial q_i}\right| < a_0,$$

имеем

$$|u| \leqq a_0, \quad \rho |u| \leqq a_0, \ldots .$$

(III) Существование производных по t установлено в параграфе 19-м. Из сказанного там ясно, что эти производные непрерывные функции в (Q), причем:

$$(IV) \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| < a, \quad \rho \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| < a,$$

где a некоторое число.

(V) Из сказанного в параграфе 18-м ясно, что функции (59) имеют производные по q_1, q_2, q_3, t, причем эти производные непрерывны во всякой области, не заключающей точки границы, и из (63) ясно, что они удовлетворяют неравенствам:

$$(VI) \quad \left|\frac{\partial u}{\partial q_i}\right| \leqq a_0, \; \rho^2 \left|\frac{\partial u}{\partial q_i}\right| \leqq a_0, \; \ldots, \; \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial q_i}\right| \leqq a, \; \rho^2 \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial q_i}\right| \leqq a, \ldots .$$

(VII) Из сказанного в прошлом параграфе ясно, что производные

$$\frac{\partial u}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial w}{\partial q_i}$$

стремятся к определенным пределам, когда точка приближается к границе и что

$$\text{(VIII)} \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)_\alpha\right| \leqq a_0 r_0^{1-\lambda},$$

где r_0 расстояние от точки M_1 до предельной точки M_0 на границе.

(IX) Если M_1 и M_2 две точки, расположенные по одну сторону от границы, расстояние между которыми r, то при всяком n:

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial q_i}\right|_1 - \left.\frac{\partial u_n}{\partial q_i}\right|_2\Bigg| < a_0 r^{1-\lambda},$$

откуда

$$\left|\frac{\partial u}{\partial q_i}\right|_1 - \left.\frac{\partial u}{\partial q_i}\right|_2\Bigg| \leqq a_0 r^{1-\lambda}.$$

22. Функции (59) удовлетворяют системе уравнений:

$$(64) \qquad \begin{cases} u = u_0 + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^t \left(\int \frac{L(\xi - x)}{r^3} d\omega\right) dt, \\[2ex] v = v_0 + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^t \left(\int \frac{L(\eta - y)}{r^3} d\omega\right) dt, \\[2ex] w = w_0 + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^t \left(\int \frac{L(\zeta - z)}{r^3} d\omega\right) dt, \end{cases}$$

в которой u_0, v_0, w_0 функции, заданные в параграфе 1-м,

$$(65) \quad L = 2\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial q_1}, & \frac{\partial u}{\partial q_2}, & \frac{\partial u}{\partial q_3} \\ \frac{\partial v}{\partial q_1}, & \frac{\partial v}{\partial q_2}, & \frac{\partial v}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1}, & \frac{\partial z}{\partial q_2}, & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial q_1}, & \frac{\partial u}{\partial q_2}, & \frac{\partial u}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1}, & \frac{\partial y}{\partial q_2}, & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial w}{\partial q_1}, & \frac{\partial w}{\partial q_2}, & \frac{\partial w}{\partial q_3} \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1}, & \frac{\partial x}{\partial q_2}, & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial v}{\partial q_1}, & \frac{\partial v}{\partial q_2}, & \frac{\partial v}{\partial q_3} \\ \frac{\partial w}{\partial q_1}, & \frac{\partial w}{\partial q_2}, & \frac{\partial w}{\partial q_3} \end{vmatrix},$$

$$(66) \quad \begin{cases} x = q_1 + \int_0^t u(q_1, q_2, q_3, t)\, dt, \\ y = q_2 + \int_0^t v(q_1, q_2, q_3, t)\, dt, \\ z = q_3 + \int_0^t w(q_1, q_2, q_3, t)\, dt, \end{cases}$$

$$(66') \quad \begin{cases} \xi = p_1 + \int_0^t u(p_1, p_2, p_3, t)\, dt, \\ \eta = p_2 + \int_0^t v(p_1, p_2, p_3, t)\, dt, \\ \zeta = p_3 + \int_0^t w(p_1, p_2, p_3, t)\, dt, \end{cases}$$

где p_1, p_2, p_3 переменные интегрирования, которыми должны быть заменены аргументы q_1, q_2, q_3 в функции L и

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2, \quad d\omega = dp_1\, dp_2\, dp_3.$$

Для доказательства подставляем в левые части уравнений (64) вместо u, v, w их значения.

Мы получим функции

$$U = u_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \left(\int \frac{L(\xi - x)}{r^3} d\omega \right) dt,$$

$$V = v_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \left(\int \frac{L(\eta - y)}{r^3} d\omega \right) dt,$$

$$W = w_0 + \frac{1}{4\pi}\int_0^t \left(\int \frac{L(\zeta - z)}{r^3} d\omega \right) dt.$$

Докажем, что

$$U = u, \quad V = v, \quad W = w.$$

Вследствие сказанного в параграфе 21-м функции U, V, W обладают всеми свойствами функций u_n, v_n, w_n, перечисленными в параграфе 3-м главы 1-й.

Выбираем произвольно положительное число ε и ищем такое N, чтобы при $n \geqq N$:

$$|u - u_{n-1}| < \varepsilon, \quad |v - v_{n-1}| < \varepsilon, \quad |w - w_{n-1}| < \varepsilon$$

$$\rho |u - u_{n-1}| < \varepsilon, \quad \rho |v - v_{n-1}| < \varepsilon, \quad \rho |w - w_{n-1}| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial q_i} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial q_i}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial v}{\partial q_i} - \frac{\partial v_{n-1}}{\partial q_i}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial w}{\partial q_i} - \frac{\partial w_{n-1}}{\partial q_i}\right| < \varepsilon$$

$$\rho^2 \left|\frac{\partial u}{\partial q_i} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial q_i}\right| < \varepsilon, \quad \rho^2 \left|\frac{\partial v}{\partial q_i} - \frac{\partial v_{n-1}}{\partial q_i}\right| < \varepsilon, \quad \rho^2 \left|\frac{\partial w}{\partial q_i} - \frac{\partial w_{n-1}}{\partial q_i}\right| < \varepsilon.$$

Вспоминая сказанное в параграфе 6-м, будем иметь, сохраняя обозначения параграфа 6-го:

$$\left|\frac{\partial x}{\partial q_i} - \frac{\partial x_n}{\partial q_i}\right| < b_0 \varepsilon, \ \ldots,$$

$$|L - L_{n-1}| < c\varepsilon, \quad \rho^4 |L - L_{n-1}| < c\varepsilon.$$

Заменяя теперь в параграфе 7-м G_n через ε и откидывая в правых частях неравенств этого параграфа значок n, а в левых заменив u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} через U, V, W, получим из формул (29) того параграфа

$$|U - u_n| < b \int_0^t \varepsilon \, dt = b\varepsilon t, \quad |V - v_n| < b\varepsilon t, \quad |W - w_n| < b\varepsilon t.$$

Так как последние неравенства справедливы при всех значениях n, бо̀льших некоторого N, и так как ε выбрано произвольно, они говорят, что

$$U = \text{прд}\, u_n = u, \quad V = \text{прд}\, v_n = v, \quad W = \text{прд}\, w_n = w,$$

что и требовалось доказать.

23. Найденное решение системы (64) в некотором смысле единственное.

Если функции U, V, W удовлетворяют всем девяти условиям, перечисленным в параграфе 3-м главы 1-й, если их значения при $t = 0$ равны u_0, v_0, w_0 и если они удовлетворяют уравнениям (64), то

$$U = u, \quad V = v, \quad W = w.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно положить, как в параграфе 6-м:

$$(21')\quad \begin{cases} |U-u_{n-1}|<G_n, & |V-v_{n-1}|<G_n, & |W-w_{n-1}|<G_n, \\ \rho\,|U-u_{n-1}|<G_n, & \rho\,|V-v_{n-1}|<G_n, & \rho\,|W-w_{n-1}|<G_n, \end{cases}$$

$$(22')\quad \begin{cases} \left|\frac{\partial U}{\partial q_i}-\frac{\partial u_{n-1}}{\partial q_i}\right|<G_n, & \left|\frac{\partial V}{\partial q_i}-\frac{\partial v_{n-1}}{\partial q_i}\right|<G_n, & \left|\frac{\partial W}{\partial q_i}-\frac{\partial w_{n-1}}{\partial q_i}\right|<G_n, \\ \rho^2\left|\frac{\partial U}{\partial q_i}-\frac{\partial u_{n-1}}{\partial q_i}\right|<G_n, & \rho^2\left|\frac{\partial V}{\partial q_i}-\frac{\partial v_{n-1}}{\partial q_i}\right|<G_n, & \rho^2\left|\frac{\partial W}{\partial q_i}-\frac{\partial w_{n-1}}{\partial q_i}\right|<G_n, \end{cases}$$

и обратить внимание на то, что

$$(67)\quad \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\int_0^t\left(\int\frac{L(\xi-x)}{r^3}d\omega\right)dt-\frac{1}{4\pi}\int_0^t\left(\int\frac{L_{n-1}(\xi_{n-1}-x_{n-1})}{r^3_{n-1}}d\omega\right)dt=U-u_n, \\ \frac{1}{4\pi}\int_0^t\left(\int\frac{L(\eta-y)}{r^3}d\omega\right)dt-\frac{1}{4\pi}\int_0^t\left(\int\frac{L_{n-1}(\eta_{n-1}-y_{n-1})}{r^3_{n-1}}d\omega\right)dt=V-v_n, \\ \frac{1}{4\pi}\int_0^t\left(\int\frac{L(\zeta-z)}{r^3}d\omega\right)dt-\frac{1}{4\pi}\int_0^t\left(\int\frac{L_{n-1}(\zeta_{n-1}-z_{n-1})}{r^3_{n-1}}d\omega\right)dt=W-w_n, \end{cases}$$

вследствие того, что U, V, W образуют решение системы (64).

В формулах (67), конечно, L, x, y, z составлены по функциям U, V, W, как в прошлом параграфе соответственные функции составлялись по u, v, w.

Повторение сказанного в параграфах 6—12 приведет к заключению, что функции G_n и G_{n+1} связаны соотношениями, указанными в параграфе 13-м, с той только разницей, что число a придется, может быть, смотря по тому, каким образом ограничены значения функций U, V, W, заменить другим, a_1, также не зависящим от n.

Отсюда же вытекает, что какова бы ни была точка $M_1(q_1, q_2, q_3)$, не лежащая на границе, число G_n, составленное соответственно этой точке, бесконечно мало, пока t удовлетворяет неравенству

$$0<t<\frac{1}{(1+\lambda)a_1}.$$

Вследствие этого, неравенства (21') говорят, что

$$U=\text{прд}\,u_n=u,\quad V=\text{прд}\,v_n=v,\quad W=\text{прд}\,w_n=w,$$

что и требовалось доказать.

24. Из уравнений (64) имеем

$$(68)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{L(\xi - x)}{r^3}\,d\omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{L(\eta - y)}{r^3}\,d\omega, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{L(\zeta - z)}{r^3}\,d\omega, \end{aligned}\right.$$

причем уравнения (66) дают

$$(69)\qquad \frac{\partial x}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = w.$$

Решив, руководствуясь сказанным в параграфе 7-м главы 1-й, уравнения (66) относительно q_1, q_2, q_3, выразим u, v, w через x, y, z.

Считая переменными независимыми x, y, z, будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}u + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}v + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}w$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}u + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}v + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}w$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}u + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}v + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}w,$$

где временно через $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ обозначены функции u, v, w, как функции x, y, z, t.

В интегралах равенств (68) введем переменные интегрирования ξ, η, ζ. Положив

$$K = LJ, \quad J = \left|\frac{\partial q_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial q_3}{\partial z}\right|,$$

имеем:

$$LJ = 2\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial q_1}, \frac{\partial v}{\partial q_2}, \frac{\partial z}{\partial q_3}\right| \left|\frac{\partial q_1}{\partial x}, \frac{\partial q_2}{\partial y}, \frac{\partial q_3}{\partial z}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_2}, \frac{\partial w}{\partial q_3}\right| \left|\frac{\partial q_1}{\partial x}, \frac{\partial q_2}{\partial y}, \frac{\partial q_3}{\partial z}\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial v}{\partial q_2}, \frac{\partial w}{\partial q_3}\right| \left|\frac{\partial q_1}{\partial x}, \frac{\partial q_2}{\partial y}, \frac{\partial q_3}{\partial z}\right|\right\} =$$

$$= 2\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}\right| + \left|\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}\right|\right\} =$$

$$= 2\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right\} = K,$$

и, преобразуя уравнения (68), получим:

$$(70)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{K\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}, \\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{K\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}, \\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{K\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}. \end{cases}$$

Условимся, как принято, левые части последних уравнений обозначать во избежание недоразумений через

$$\frac{du}{dt},\quad \frac{dv}{dt},\quad \frac{dw}{dt},$$

понимая, следовательно, под этими знаками то же самое, что понимали под знаками

$$(71)\qquad \frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{\partial v}{\partial t},\quad \frac{\partial w}{\partial t},$$

пока функции u, v, w были выражены через q_1, q_2, q_3, t.

25. Из доказанного в 3-й главе вытекает, что функции (71) имеют производные по q_1, q_2, q_3 во всякой точке, не лежащей на границе пространства (Q); следовательно, если точка $M(x, y, z)$ не лежит на границе пространства (Ξ), то функции (71) имеют производные по x, y, z.

Отыскивая эти производные, находим:

$$(72)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial q_1}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial q_2}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial q_3}\cdot\frac{\partial q_3}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dv}{dt}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial q_1}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial q_2}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial q_3}\cdot\frac{\partial q_3}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dw}{dt}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial q_1}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial q_2}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial q_3}\cdot\frac{\partial q_3}{\partial z}. \end{cases}$$

Вспоминаем формулы параграфа 8-го главы 1-й:

$$\frac{\partial q_i}{\partial x}=\frac{1}{J}\text{ мин }\frac{\partial x}{\partial q_i},\quad \frac{\partial q_i}{\partial y}=\frac{1}{J}\text{ мин }\frac{\partial y}{\partial q_i},\quad \frac{\partial q_i}{\partial z}=\frac{1}{J}\text{ мин }\frac{\partial z}{\partial q_1},$$

где

$$J=\left|\frac{\partial x}{\partial q_1},\quad \frac{\partial y}{\partial q_2},\quad \frac{\partial z}{\partial q_3}\right|$$

и миноры принадлежат определителю J.

Из этих формул заключаем, что функции

$$\frac{\partial q_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial z}$$

имеют производные по t; все элементы, именно, через которые они выражены, на основании формул

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = 2 + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial q_1} dt, \quad \frac{\partial y}{\partial q_1} = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial q_1} dt, \quad \frac{\partial z}{\partial q_1} = \int_0^t \frac{\partial w}{\partial q_i} dt, \ldots\ldots$$

имеют производные по t.

Следовательно, функции

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial q_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial q_3}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial q_3}{\partial z}$$

имеют производные по t, так как

$$\frac{\partial u}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial w}{\partial q_i}$$

на основании уравнений (64) их, очевидно, имеют.

Отыскивая эту производную для функции $\frac{\partial u}{\partial x}$, имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial q_3} \cdot \frac{\partial q_3}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial q_1} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial q_2} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial q_3} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial q_3}{\partial x},$$

откуда, пользуясь (72):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \left\{\frac{\partial u}{\partial q_1} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial q_2} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial q_3} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial q_3}{\partial x}\right\} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial u}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\text{мин} \frac{\partial x}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial u}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\text{мин} \frac{\partial x}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial u}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\text{мин} \frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{J^2} \cdot \frac{\partial J}{\partial t}\left\{\frac{\partial u}{\partial q_1} \text{ мин } \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial u}{\partial q_2} \text{ мин } \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial u}{\partial q_3} \text{ мин } \frac{\partial x}{\partial q_3}\right\}.$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{мин}\ \frac{\partial x}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial y}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_3}-\frac{\partial y}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_2}\right\}=\left(\frac{\partial v}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_3}-\frac{\partial v}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial w}{\partial q_3}-\frac{\partial y}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial w}{\partial q_2}\right)=$$

$$=\left(\text{мин}\ \frac{\partial u}{\partial q_1}\right)_1+\left(\text{мин}\ \frac{\partial u}{\partial q_1}\right)_2,$$

условившись обозначать значками (1), (2), (3) миноры определителей, образующих первое, второе и третье слагаемые в выражении (65) функции L.

Так же

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{мин}\ \frac{\partial x}{\partial q_2}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial y}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_1}-\frac{\partial y}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_3}\right\}=\left(\frac{\partial v}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_1}-\frac{\partial v}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial w}{\partial q_1}-\frac{\partial y}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial w}{\partial q_3}\right)=$$

$$=\left(\text{мин}\ \frac{\partial u}{\partial q_2}\right)_1+\left(\text{мин}\ \frac{\partial u}{\partial q_2}\right)_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{мин}\ \frac{\partial x}{\partial q_3}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_2}-\frac{\partial y}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=\left(\text{мин}\ \frac{\partial u}{\partial q_3}\right)_1+\left(\text{мин}\ \frac{\partial u}{\partial q_3}\right)_2.$$

Значит,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-J\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial q_1},\ \frac{\partial v}{\partial q_2},\ \frac{\partial z}{\partial q_3}\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial q_1},\ \frac{\partial y}{\partial q_2},\ \frac{\partial w}{\partial q_3}\right|\right\}+$$

$$+\frac{1}{J^2}\cdot\frac{\partial J}{\partial t}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)\text{мин}\ \frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\text{мин}\ \frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\text{мин}\ \frac{\partial x}{\partial q_3}\right\}.$$

Таким же образом найдем:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dv}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-J\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial q_1},\ \frac{\partial v}{\partial q_2},\ \frac{\partial z}{\partial q_3}\right|+\left|\frac{\partial x}{\partial q_1},\ \frac{\partial v}{\partial q_2},\ \frac{\partial w}{\partial q_3}\right|\right\}+$$

$$+\frac{1}{J^2}\cdot\frac{\partial J}{\partial t}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)\text{мин}\ \frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)\text{мин}\ \frac{\partial y}{\partial q_2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)\text{мин}\ \frac{\partial y}{\partial q_3}\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dw}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)-J\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial q_1},\ \frac{\partial y}{\partial q_2},\ \frac{\partial w}{\partial q_3}\right|+\left|\frac{\partial x}{\partial q_1},\ \frac{\partial v}{\partial q_2},\ \frac{\partial w}{\partial q_3}\right|\right\}+$$

$$+\frac{1}{J^2}\cdot\frac{\partial J}{\partial t}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\text{мин}\ \frac{\partial z}{\partial q_1}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)\text{мин}\ \frac{\partial z}{\partial q_2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)\text{мин}\ \frac{\partial z}{\partial q_3}\right\}.$$

Складывая и пользуясь уравнениями (70), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dt}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dv}{dt}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dw}{dt}\right)=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\frac{Kd\xi d\eta d\zeta}{r}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int\frac{Kd\xi d\eta d\zeta}{r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\frac{Kd\xi d\eta d\zeta}{r}\right\}=$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right\}-JL+\frac{1}{J^2}\left(\frac{\partial J}{\partial t}\right)^2.$$

Но, как было указано в параграфе 8-м главы 1-ой:

$$\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial J}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Следовательно последнее равенство дает

$$-K=\frac{d\theta}{dt}-K+\theta^2$$

или

(73) $$\frac{d\theta}{dt}+\theta^2=0,$$

где

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Положим теперь, что функции

$$u_0,\ v_0,\ w_0,$$

введенные в параграфе 1-м, кроме указанных там условий, удовлетворяют еще условию

(74) $$\frac{\partial u_0}{\partial q_1}+\frac{\partial v_0}{\partial q_2}+\frac{\partial w_0}{\partial q_3}=0.$$

Так как функция θ при $t=0$ обращается в

$$\frac{\partial u_0}{\partial q_1}+\frac{\partial v_0}{\partial q_2}+\frac{\partial w_0}{\partial q_3},$$

из уравнения (73) ясно, что

$$\theta=0.$$

26. Итак, если мы функции u_0, v_0, w_0, введенные в параграфе 1-м этой главы, подчиним, сверх перечисленных там условий, еще условию

(74) $$\frac{\partial u_0}{\partial q_1}+\frac{\partial v_0}{\partial q_2}+\frac{\partial w_0}{\partial q_3}=0,$$

то функции u, v, w, удовлетворяющие системе уравнений (64), вместе с функцией Π, где

(75) $$\Pi=\frac{1}{4\pi}\int\frac{K d\xi d\eta d\zeta}{r}+C,$$

в которой C функция от одного t и

$$K = 2\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right\},$$

образуют решение системы уравнений:

$$(76)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial \Pi}{\partial x}, \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial \Pi}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial \Pi}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(77)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

т.-е. решают основную задачу гидродинамики: определить движение несжимаемой жидкости, постоянной плотности, занимающей все пространство и находящейся под действием сил, имеющих потенциал, зная распределение скоростей в момент $t = 0$.

Если ρ постоянная плотность, а P потенциал действующих сил на жидкость, то давление p вычисляется по формуле

$$(78)\qquad p = P - \rho\Pi.$$

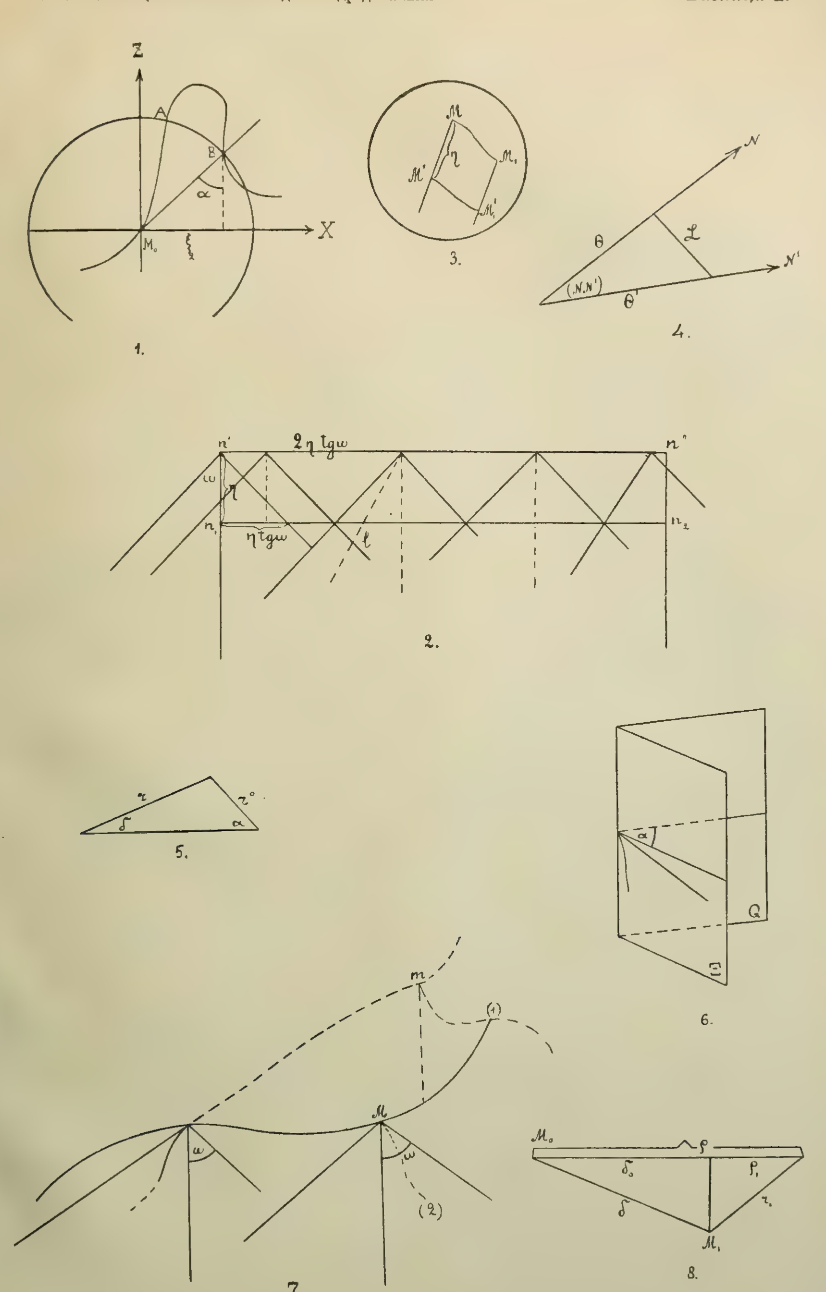
Вычитая из K нуль в виде θ^2 и вводя составляющие вихря:

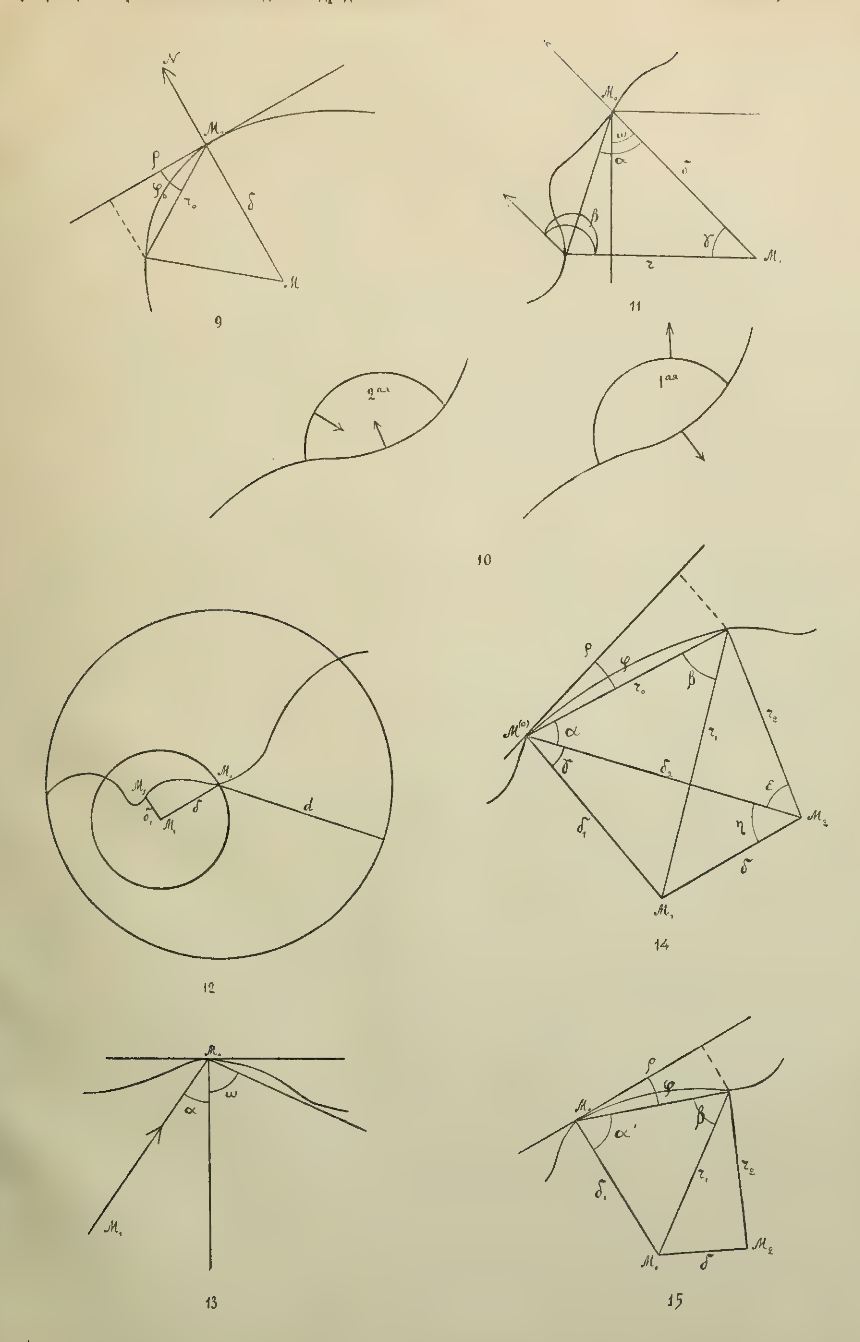
$$\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},\quad \omega_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},\quad \omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

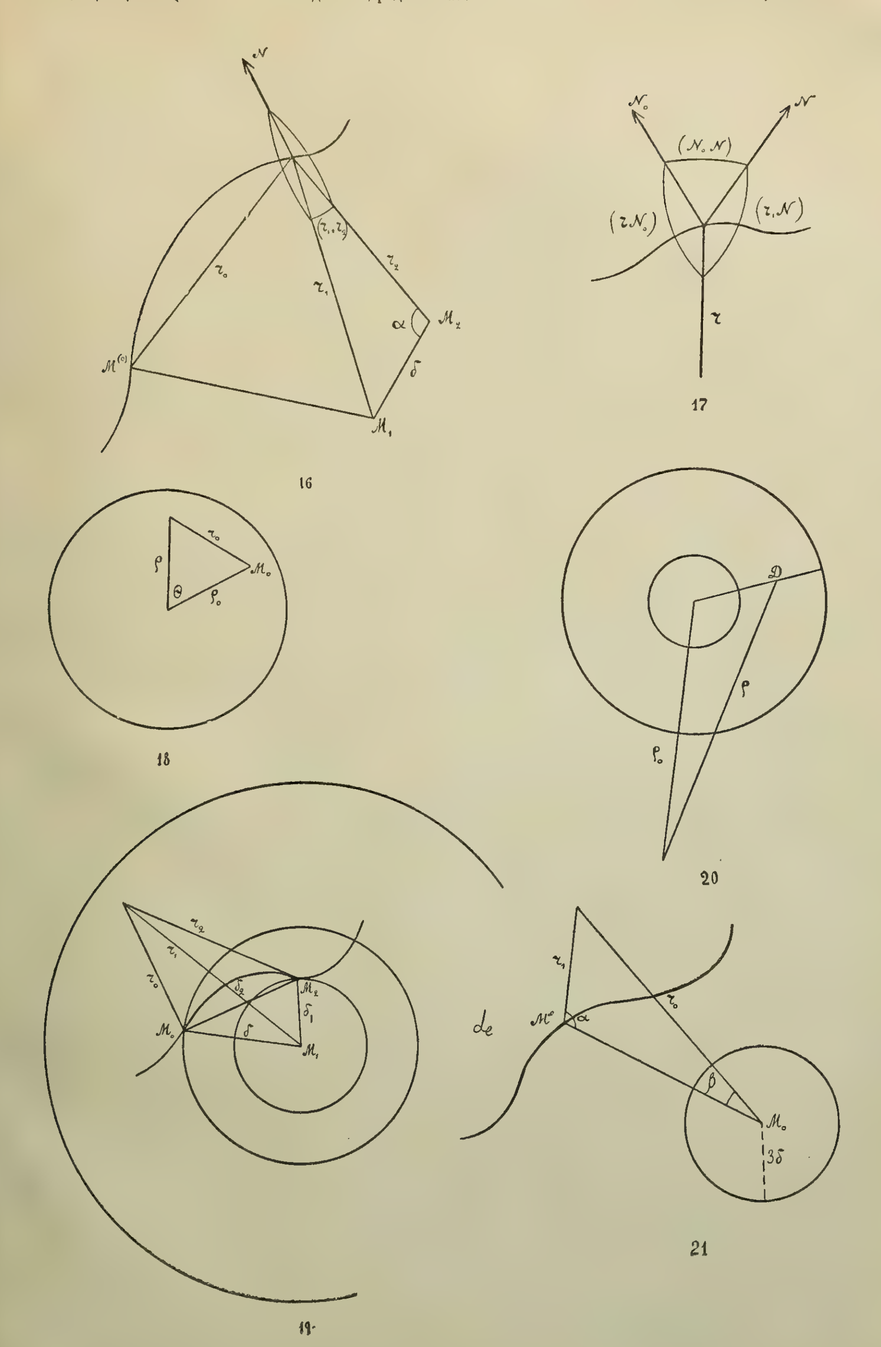
мы можем дать K следующий вид

$$(79)\qquad \begin{cases} K = -\left\{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \right. \\[2mm] \qquad \left. + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2\right\}. \end{cases}$$

Сентябрь 1923 г.


Z
A
B
α
X
M₀
1.
M
M'
η
M₁
M₁'
3.
N
θ
L
N'
(N,N')
θ'
4.
n'
2η tgω
n''
ω
η
n₁
ηtgω
l
n₂
2.
r
r°
δ
α
5.
α
Q
Ξ
6.
m
(1)
M
ω
ω
(2)
7.
M₀
ρ
δ₀
ρ₁
δ
r₁
M₁
8.


9
10
11
12
13
14
15


N
(r₁, r₂)
r₀
r₁
r₂
α
M₂
M⁽⁰⁾
δ
M₁
16
N₀
N
(N₀ N)
(r N₀)
(r₁ N)
r
17
ρ
r₀
M₀
θ
ρ₀
18
D
ρ
ρ₀
20
r₂
r₁
r₀
δ₂
M₂
δ₁
M₀
δ
M₁
19
r₁
r₀
M⁰
α
β
M₀
3δ
21


UTL AT DOWNSVIEW
D RANGE BAY SHLF POS ITEM C
39 15 24 10 12 014 5